



benzensor



DERS NOTLARI 2026 BASKISI

KPSS GEOMETRİ

34 Konuluk Ders Notları

KPSS Geometri konularının tamamı için benzensor'un hazırladığı özgün konu anlatımı notları.

KİTAPÇIK

Ders / bölüm	1
Konu anlatımı	34
Kelime	14.763

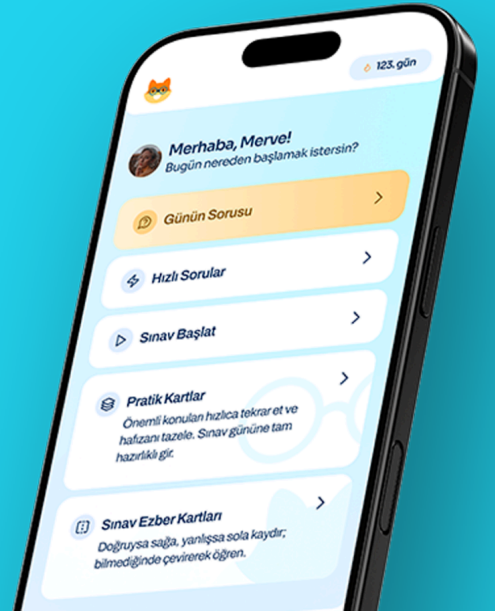
KAPSAM

Sınav konu listesinin tamamı
Özgün benzensor anlatımı
Resmî kurum yayını değildir

Konu Anlatımı ve Soru

Cebinde!

benzensor uygulamasında bu konuların anlatımını dinleyebilir, her konudan soru çözebilir ve gerçek sınav simülasyonuna girebilirsin.



Bu kitapçık hakkında

KPSS Geometri ders notları · 2026 baskısı · 34 konu

Bu kitapçık nedir?

Bu kitapçık benzensor'un hazırladığı **özgün çalışma notudur**. Konu anlatımlarının tamamı benzensor tarafından yazılmıştır; hiçbir kaynaktan olduğu gibi alınmamıştır. Amacı sınava hazırlanan adaya konuyu bütünlüklü bir anlatımla aktarmaktır.

Resmî bir yayın değildir

Bu belge ÖSYM, SPL (Sermaye Piyasası Lisanslama Sicil ve Eğitim Kuruluşu), Diyanet İşleri Başkanlığı, TÜMOB/TESMER veya sınavı düzenleyen başka bir kurumun yayını değildir; hiçbir resmî geçerliliği yoktur. Kitapçıkta yer alan hiçbir ifade, ilgili kurumların resmî görüşü olarak okunamaz.

Hangi kaynaklara dayanılarak yazıldı?

Anlatımlar aşağıdaki kaynaklara dayanılarak, özgün metin olarak yazılmıştır. Bir çelişki durumunda bağlayıcı olan bu kitapçık değil, aşağıdaki resmî kaynakların güncel metinleridir:

- Ayrıca konu sınırlarını doğrulamak için 1 adet kamuya açık hazırlık materyali incelenmiştir; bunlar bağlayıcı kaynak değildir.

Kapsam ve mevzuat değişikiş

Bu baskı **29 Temmuz 2026** tarihinde üretilmiştir ve içeriği o tarihteki sınav konu listesine ve mevzuata dayanır. Sınav kapsamı, konu ağırlıkları ve mevzuat değişebilir; çalışmadan önce sınavı düzenleyen kurumun yürürlükteki kılavuzunu ve ilgili mevzuatın güncel metnini mutlaka kontrol et.

Hata bildirimi

Kitapçıkta bir hata gördüysen **destek@benzensor.com** adresine yazarak bildirebilirsin; düzeltilen içerik bir sonraki baskıya işlenir.

Kapsam

#	DERS / BÖLÜM	YAZILAN / TOPLAM KONU
3	Geometri	34/34

Bu kitapçık, sınav konu listesindeki tüm başlıkları kapsar.

İçindekiler

3. Geometri

- 3.1.1 Geometrik Kavramlar
- 3.1.2 Üçgende Açılar
- 3.1.3 Dik Üçgen
- 3.1.4 Üçgende Açortay Teoremleri
- 3.1.5 Üçgende Kenarortay Teoremleri
- 3.1.6 Özel Üçgenler
- 3.1.7 Üçgende Alan
- 3.1.8 Üçgende Benzerlik
- 3.1.9 Üçgende Açı-Kenar Bağlantıları
- 3.2.1 Çokgenler
- 3.2.2 Dörtgenler
- 3.2.3 Paralelkenar-Eşkanar-Dörtgen
- 3.2.4 Dikdörtgen-Kare
- 3.2.5 Yamuk-Deltoid
- 3.3.1 Çemberde Aç
- 3.3.2 Çemberde Uzunluk
- 3.3.3 Dairede Alan
- 3.4.1 Noktanın Analitik İncelenmesi
- 3.4.2 Analitik Düzlem
- 3.4.3 Doğrunun Analitik İncelenmesi
- 3.4.4 Doğrunun Grafiğinin Çizimi
- 3.4.5 Doğrunun Denklemleri
- 3.4.6 Simetriler
- 3.4.7 Eşitsizlikler
- 3.5.1 Prizma
- 3.5.2 Dikdörtgenler Prizması
- 3.5.3 Küp
- 3.5.4 Silindir
- 3.5.5 Dönel Silindir
- 3.5.6 Piramit
- 3.5.7 Düzgün Piramit
- 3.5.8 Kesik Piramit
- 3.5.9 Koni
- 3.5.10 Küre

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.1.1 - Geometrik Kavramlar

Geometrinin Temel Dili: Nokta, Doğru, Açı ve Şekil Okuma

KISACA

Geometrik kavramlar, şekilli sorularda verilen bilgiyi doğru isimlendirme ve doğru ilişkiye bağlama becerisidir. Nokta konumu, doğru sınırsız uzantıyı, doğru parçası iki uç arasındaki sınırlı kısmı, ışın ise bir başlangıçtan tek yöne giden doğrusal parçayı anlatır. Açı, iki ışının ortak başlangıç noktasında oluşturduğu açıklıktır ve dereceyle ölçülür. Doğruda açılar konusu özellikle bütünler, tümler, ters, yöndeş, iç ters ve dış ters açı ilişkileriyle birlikte düşünülür. Paralel doğrular bir kesenle kesildiğinde bazı açılar eşit, bazıları toplamı 180 derece olacak biçimde bağlıdır. Şekil üzerinde küçük bir eşitlik işareti, paralellik oku veya diklik simgesi varsa, işlemden önce bu sembollerin hangi açı ilişkisini doğurduğu okunmalıdır. Bu temel dil sağlam kurulmadığında üçgen, dörtgen ve çember sorularında asıl formül bilinse bile soru eksik çözülür.

Geometrik kavramlar, şekli ezberlenmiş bir resim gibi görmek yerine verilen her işareti matematik cümlesine çevirmeyi gerektirir. Nokta, uzunluğu ve alanı olmayan konum bilgisidir; doğru, iki yöne sınırsız uzanan doğrusal yapıdır; doğru parçası iki uç noktası belli olan sınırlı kısımdır; ışın ise bir uç noktadan başlayıp tek yönde ilerler. Soruda AB doğrusu, AB doğru parçası veya AB ışını denildiğinde aynı harfler kullanılsa bile anlam değişir. Bir doğru parçasının uzunluğu ölçülür, bir doğrunun tamamı ölçülmez. Bu ayrım özellikle paralellik, kesişme ve uzunluk karşılaştırmalarında ilk güvenli adımdır.

Açı, ortak başlangıç noktasına sahip iki ışının arasında kalan açıklık olarak düşünülür. Dik açı 90 derece, doğru açı 180 derece, tam açı 360 derecedir. Ölçüsü 90 dereceden küçük olan dar açı, 90 ile 180 derece arasında kalan geniş açı ve toplamı 90 derece olan tümler açılar temel sınıflamayı oluşturur. Toplamı 180 derece olan bütünler açılar ise doğruda açılar sorularının en sık kullanılan ilişkisidir. Bir doğru üzerinde yan yana duran iki açı çoğu kez bütünlerdir; kesişen iki doğru üzerinde karşılıklı duran ters açılar ise eşittir. Bu iki bilgi, sorunun başında bilinmeyen nereye yazacağını belirler.

Paralel iki doğruyu kesen üçüncü bir doğru varsa şeklin dili biraz daha zenginleşir. Yöndeş açılar eşit, iç ters açılar eşit, dış ters açılar eşittir. Aynı tarafta kalan iç açılar ise bütünlerdir. Burada mesele bütün isimleri ezberlemekten çok konumu okuyabilmektir. Kesen doğrunun iki paraleli kestiği yerlerde açının paralellere göre aynı köşede mi, paralellerin arasında mı, farklı tarafta mı kaldığına bakılır. Şekilde paralellik işareti yoksa yalnızca gözle paralel gibi duruyor diye bu ilişkiler kullanılamaz; geometri sorusunda çizim yardımcıdır ama hüküm, verilen sembol ve cümlelerden çıkar.

Bu temel kavramlar sonraki konuların taşıyıcı iskeletidir. Üçgende iç açılar toplamını kullanırken doğru açı bilgisi, dış açı kurarken bütünler ilişkisi, dörtgende paralelkenarı çözerken paralel doğrulardaki açı eşitlikleri, çemberde teğet sorusunda diklik kavramı devreye girer. Sağlam çözüm, önce şeklin üzerindeki paralellik, eşitlik, diklik ve uzunluk işaretlerini metne çevirmekle başlar. Ardından bilinmeyen açığa doğrudan gitmek yerine, onu bağlayan komşu ve karşılıklı ilişkiler yazılır. Böyle yapıınca

geometri, karmaşık çizgi kalabalığı olmaktan çıkar ve birkaç temel ilişkinin sırayla uygulanmasına dönüşür.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.1.2 · Üçgende Açılar

Üçgende Açı İlişkileri ve Dış Açı Mantığı

KISACA

Üçgende açılar, bir üçgenin iç açılar toplamının 180 derece olması ve dış açının kendisine komşu olmayan iki iç açının toplamına eşit olması üzerine kurulur. Bu iki ilişki, çok sayıda şekilli sorunun ana omurgasını verir. Bir üçgende iki açı biliniyorsa üçüncü açı doğrudan bulunur; bir kenar uzatılmışsa oluşan dış açı, uzak iç açılarının toplamı olarak okunur. İkizkenar üçgende eşit kenarların karşısındaki açılar eşittir, eşkenar üçgende ise tüm iç açılar 60 derecedir. Paralel doğrularla birlikte verilen üçgenlerde, iç ters veya yöndeş açılar önce üçgenin içine taşınır, sonra 180 derece toplamı uygulanır. Açı sorusunda en güvenli yol, bilinmeyene hemen formül aramak değil, şekildeki eşitlik, paralellik ve uzatma bilgilerini sırayla üçgenin içine çevirmektir.

Üçgende açılar konusunun merkezi, üç iç açının toplamının 180 derece olmasıdır. Bu bilgi yalnız başına basit görünür, fakat soru içinde genellikle paralel doğrular, dış açı, ikizkenar üçgen veya yardımcı çizgiyle birlikte gelir. Bir üçgenin iki iç açısı verildiğinde üçüncü açı 180 dereceden bu iki açının toplamı çıkarılarak bulunur. Ancak çoğu soru doğrudan iki açı vermez; bir açı doğrudan bütünler ilişkisinden, başka bir açı paralellikten, üçüncü bilgi ise eşit kenar işaretinden çıkarılır. Bu yüzden önce şeklin çevresindeki ilişkiler okunur, sonra üçgen toplamına geçilir.

Dış açı, üçgenin bir kenarının uzatılmasıyla oluşur ve komşu olduğu iç açıyla toplamı 180 derece yapar. Aynı dış açı, kendisine komşu olmayan iki iç açının toplamına eşittir. Bu ikinci ifade, KPSS tarzı şekillerde çok kullanışlıdır; çünkü dış açı bazen içerideki iki parçalı açıyı tek hamlede verir. Örneğin bir köşe dışında x yazılıysa ve uzak iç açılar a ile b ise x eşittir a artı b biçiminde düşünülür. Bu ilişki ezber gibi kullanılmamalıdır; dış açının hangi iç açıyla komşu olmadığı doğru seçilmelidir.

İkizkenar üçgenlerde eşit kenarlar, eşit taban açıları üretir. Şekilde iki kenar üzerinde aynı çizgi işareti varsa bu kenarların karşısındaki açılar eşittir. Eşkenar üçgende üç kenar eşit olduğundan üç açı da 60 derecedir. Bu bilgi bazen soruda doğrudan verilmez; bir üçgende iki açının eşit olduğu görülürse karşısındaki kenarların eşitliği de ters yönde kullanılabilir. Böylece uzunluk işareti açığa, açı eşitliği uzunluğa taşınabilir.

Paralel doğrularla kurulan üçgenlerde açıları taşımak önemlidir. Bir kesen paralel doğruları kestiğinde iç ters, dış ters veya yöndeş açı eşitlikleri oluşur; aynı taraftaki iç açılar ise bütünlerdir. Bu tür sorularda bilinmeyen açı çoğu zaman üçgenin dışında görünür, fakat paralellik sayesinde üçgenin içine alınabilir. Yardımcı çizgi çizmek de aynı mantığa dayanır: şeklin içinde görünmeyen bir üçgen veya paralellik ilişkisi kurularak açı toplamı uygulanır. Çözüm sırasında her bulunan açının yanına neden bulunduğu zihinde belirtilirse, yanlış üçgene 180 derece uygulama veya dış açıyı komşu iç açıyla karıştırma hatası azalır.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.1.3 · Dik Üçgen

Dik Üçgende Pisagor, Özel Üçlüler ve Yükseklik Bağlıntıları

KISACA

Dik üçgen, bir açısı 90 derece olan üçgendir ve bu diklik bütün çözümü yönlendirir. Dik açının karşısındaki en uzun kenar hipotenüstür; diğer iki kenar dik kenar olarak kullanılır. Pisagor bağıntısı, dik kenarların kareleri toplamının hipotenüsün karesine eşit olduğunu söyler. 3–4–5, 5–12–13 ve bunların katları gibi özel üçlüler işlemi hızlandırır. 45–45–90 üçgeninde dik kenarlar eşit, hipotenüs bu kenarın kök 2 katıdır. 30–60–90 üçgeninde 30 derecenin karşısı kısa kenar, hipotenüs bunun iki katı, 60 derecenin karşısı kısa kenarın kök 3 katıdır. Soruda diklik işareti, çap gören açı, yükseklik veya kare-köşegen ilişkisi varsa dik üçgen aramak gerekir.

Dik üçgen konusunun ilk ilkesi, 90 derecelik açının karşısındaki kenarın hipotenüs olduğudur. Hipotenüs her zaman üçgenin en uzun kenarıdır; bu nedenle hangi kenarın hipotenüs olduğunu yanlış seçmek bütün işlemi bozar. Pisagor bağıntısı dik kenarları a ve b, hipotenüsü c olan bir üçgende $a^2 + b^2 = c^2$ biçiminde kullanılır. Bu bağıntı yalnızca dik üçgen için geçerlidir. Şekilde diklik işareti yoksa veya diklik başka bir üçgende oluşuyorsa, formülü otomatik uygulamak güvenli değildir.

KPSS düzeyinde dik üçgen soruları çoğu zaman özel üçlülerle hız kazanır. 3–4–5, 5–12–13, 7–24–25 ve 8–15–17 üçlüler ile bunların aynı katsayıyla büyütülmüş halleri sık görünür. Örneğin iki dik kenar 6 ve 8 ise üçgen 3–4–5 üçlüsünün iki katıdır ve hipotenüs 10 olur. Ters yönde de aynı mantık işler; hipotenüs ve bir dik kenar verilirse eksik kenar, özel üçlü fark edilerek veya Pisagorla bulunur. Özel üçlüyü tanımak işlem yükünü azaltır ama bağıntının nedenini unutturmamalıdır.

Açıları özel olan dik üçgenler ayrıca önemlidir. 45–45–90 üçgeni ikizkenar dik üçgendir; iki dik kenar eşittir, hipotenüs dik kenarın kök 2 katıdır. Kare köşegeni bu üçgenin en doğal örneğidir. 30–60–90 üçgeninde ise 30 derecenin karşısındaki kenar kısa kenardır, hipotenüs bunun iki katı olur, 60 derecenin karşısındaki kenar kısa kenarın kök 3 katıdır. Eşkenar üçgende yükseklik çizildiğinde iki tane 30–60–90 üçgeni oluşur; bu yüzden eşkenar üçgenin yüksekliği ve alanı da dik üçgen bilgisinden beslenir.

Dik üçgen bazen şeklin içinde açıkça çizilmez, öğrenci tarafından görülür. Bir yükseklik kenara dik indiğinde, bir çemberde çapı gören çevre açısı oluştuğunda, dikdörtgenin köşegeni çizildiğinde veya koordinat düzleminde yatay-düşey uzaklıklar verildiğinde dik üçgen kurulabilir. Çözümde önce dik açıyı bulmak, sonra hipotenüsü belirlemek ve en son bağıntıyı yazmak gerekir. Bu sıra korunursa hem hipotenüsle dik kenar karışmaz hem de özel üçgen oranları doğru yöne uygulanır.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.1.4 · Üçgende Açıortay Teoremleri

Açıortayla Açıyı ve Karşı Kenarı Paylaştırma

KISACA

Üçgende açıortay, bir köşedeki açıyı iki eş parçaya ayıran doğru parçasıdır. Şekilde bir köşeden karşı kenara inen çizginin yanında eş açı işaretleri varsa bu çizgi açıortaydır ve öncelikle açı ölçülerini eşitlemek gerekir. Açıortay teoremi, açıortayın karşı kenarı komşu kenarların oranında böldüğünü söyler. Yani A köşesinden BC kenarına inen açıortay, BC üzerinde D noktasını oluşturuyorsa BD ile DC oranı, AB ile AC oranına eşittir. Bu ilişki uzunluk sorularında kesirli oran kurdurur. İç açıortay kadar dış açıortay da oran mantığıyla çalışır, fakat KPSS düzeyinde asıl güvenli temel iç açıortaydır. Açıortay sorusunda açı eşitliği ile kenar oranı birlikte aranmalı, çizgi yalnızca kenarortay gibi düşünülmemelidir.

Açıortay, bir açıyı ölçü bakımından iki eş açığa ayıran doğru parçasıdır. Üçgende bir köşeden karşı kenara çizilen doğru üzerinde eş açı yayları verilmişse, bu doğru o köşenin iç açıortayıdır. İlk sonuç açıyla ilgilidir: bölünen köşedeki iki parça eşittir. Örneğin toplam köşe açısı 80 dereceyse açıortayın iki yanında 40 derece ve 40 derece vardır. Bazı sorularda toplam açı verilmez, bir parça x diğer parça cebirsel ifade olarak verilir; açıortay bilgisi bu ifadeleri eşitlemeyi sağlar.

Açıortayın asıl uzunluk teoremi, karşı kenarı komşu kenarların oranında böldüğüdür. A köşesinden BC kenarına inen açıortay D noktasına ulaşıyorsa, BD bölü DC oranı AB bölü AC oranına eşittir. Bu cümlede oranların hangi kenarlar arasında kurulacağı önemlidir. BD, AB kenarına; DC, AC kenarına karşılık gelir. Çünkü D noktasının ayırdığı parçalar, açıortayın çıktığı köşeye komşu olan kenarların büyüklükleriyle aynı oranda paylaşılır. Yanlış oran kurmamak için önce açıortayın çıktığı köşeyi, sonra bu köşeye komşu iki kenarı belirlemek gerekir.

Açıortay soruları bazen ikizkenar veya eşkenar üçgenle birleşir. İkizkenar üçgende tepe açısından indirilen açıortay aynı zamanda kenarortay ve yükseklik olabilir. Ancak bu özel durum her üçgende geçerli değildir. Sıradan bir üçgende açıortay karşı kenarı eşit iki parçaya ayırmak zorunda değildir; yalnızca komşu kenarlar eşitse eşit böler. Bu ayrım, açıortay ile kenarortayı karıştırmamak için kritiktir. Şekilde eş açı işareti varsa açıortay, eş uzunluk parçaları varsa kenarortay bilgisi önceliklidir.

Çözüm stratejisi iki kanaldan ilerler. Açı isteniyorsa eş açı parçaları ve üçgenin 180 derece toplamı kullanılır. Uzunluk isteniyorsa açıortay teoreminden oran kurulur; ortak çarpanla parçalar yazılır ve toplam kenar verilmişse denklem çözülür. Açıortay, üçgen içinde gizli benzerliklere de kapı açabilir; çünkü oranlı bölme çoğu zaman başka bir kenar paralelliğiyle birlikte gelir. Yine de ilk kontrol her zaman basittir: çizgi hangi açıyı eşitliyor, karşı kenarda hangi iki parçayı hangi komşu kenar oranında ayırıyor?

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.1.5 · Üçgende Kenarortay Teoremleri

Kenarortay, Orta Nokta ve Ağırlık Merkezi Bağlantıları

KISACA

Kenarortay, üçgenin bir köşesinden karşı kenarın orta noktasına çizilen doğru parçasıdır. Bu nedenle kenarortay bilgisi ilk olarak karşı kenarın iki eş parçaya ayrıldığını gösterir. Şekilde aynı çizgiyle işaretlenmiş iki parça veya orta nokta vurgusu varsa, o noktaya gelen köşe bağlantısı kenarortay olarak okunabilir. Üç kenarortay bir noktada kesişir ve bu nokta ağırlık merkezidir. Ağırlık merkezi, köşeden kenara doğru çizilen kenarortayı 2'ye 1 oranında böler; uzun parça köşe tarafındadır. Kenarortay, açıortayla karıştırılmamalıdır: kenarortay uzunluğu eşit böler, açıortay açığı eşit böler. İkizkenar ve eşkenar gibi özel üçgenlerde aynı çizgi birden fazla görev üstlenebilir; genel üçgende ise her işaret kendi anlamıyla kullanılmalıdır.

Kenarortay, bir üçgende bir köşeyi karşı kenarın orta noktasına bağlayan doğru parçasıdır. Bu tanımın iki sonucu vardır. Birincisi, kenarortayın ulaştığı noktada karşı kenar iki eş parçaya ayrılır. İkincisi, kenarortay bilgisi doğrudan açı eşitliği vermez. Bu ayrım çok önemlidir; çünkü şeklin içinde bir çizgi gördüğümüzde onun neyi eşitlediğine bakmadan işlem yapmak kolay hataya yol açar. Karşı kenardaki iki parça üzerinde aynı uzunluk işareti varsa kenarortay, köşe açısında eş yaylar varsa açıortay söz konusudur.

Üçgenin üç kenarortayı bir noktada kesişir. Bu kesişim noktası ağırlık merkezi olarak adlandırılır. Ağırlık merkezinin en önemli özelliği, her kenarortayı köşeden orta noktaya doğru 2'ye 1 oranında bömesidir. Köşeye yakın bölüm daha uzun, kenara yakın bölüm daha kısadır. Örneğin bir kenarortayın tamamı 12 birimse, köşe ile ağırlık merkezi arası 8 birim, ağırlık merkezi ile orta nokta arası 4 birimdir. Soruda ağırlık merkezi verildiğinde toplam uzunluk, parça uzunluğu veya oran bu bilgiyle kurulmalıdır.

Kenarortay teoremleri uzunluk sorularında farklı biçimlerde görünür. Bir üçgende karşı kenarın yarıları eşit olduğundan, toplam kenar verildiğinde her parça yarıya bölünür; parçalardan biri verildiğinde toplam kenar iki katına çıkar. Bazen kenarortay çizildiğinde iki küçük üçgenin tabanları eşit olur. Aynı yükseklikten yararlandıkları için bu iki üçgenin alanları da eşittir. Bu nedenle kenarortay yalnızca uzunluk değil, alan paylaşımı açısından da işe yarar. Özellikle alan oranı sorularında taban ve yükseklik ilişkisini görmek çözümü sadeleştirir.

Özel üçgenlerde kenarortayın görevi genişleyebilir. İkizkenar üçgende tepe noktasından tabana indirilen kenarortay aynı zamanda açıortay ve yüksekliktir. Eşkenar üçgende her kenarortay bu üç görevi birlikte taşır. Fakat bu özel durumlar yalnızca eşit kenar yapısı varsa kullanılmalıdır. Her üçgende kenarortay dik iner veya açığı ikiye böler denilemez. Sağlam çözüm, önce orta noktayı ve eş parça işaretlerini bulmak, sonra gerekiyorsa ağırlık merkezi oranını veya alan eşitliğini kullanmaktır.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.1.6 · Özel Üçgenler

Özel Üçgenleri Tanıma ve Oranla Hızlı Çözüm

KISACA

Özel üçgenler, açı veya kenar yapısı sayesinde uzunlukların hızlı bulunabildiği üçgenlerdir. Dik üçgende 3–4–5 ve 5–12–13 gibi Pisagor üçlüleri, 45–45–90 ve 30–60–90 oranları en temel örneklerdir. İkizkenar üçgende eşit kenarların karşısındaki açılar eşittir; tepe noktasından tabana indirilen doğru çoğu zaman tabanı ikiye böler, açığı ikiye böler ve diklik oluşturur. Eşkenar üçgende tüm kenarlar eşit, tüm açılar 60 derecedir; yükseklik çizildiğinde iki tane 30–60–90 üçgeni oluşur. Özel üçgenleri kullanmak, formül ezberinden çok şekil içindeki işaretleri tanımaya dayanır. Soruda oranı fark etmek işlem süresini kısaltır, fakat hangi kenarın hangi açının karşısında olduğu dikkatle belirlenmelidir.

Özel üçgenler, genel üçgen kurallarına ek olarak belirli oranlar taşıyan üçgenlerdir. Bu oranlar soruda uzun işlem yapmadan eksik kenarı veya açığı bulmayı sağlar. En bilinen grup dik üçgenlerdir. 3–4–5, 5–12–13, 7–24–25 ve 8–15–17 gibi Pisagor üçlüleri, dik kenarlarla hipotenüs arasındaki kareler toplamı ilişkisinin hazır örnekleridir. Bir şekil bu üçlülerin katlarına uyuyorsa, her seferinde kare alma işlemine gerek kalmadan eksik uzunluk görülebilir. Burada hipotenüsün en uzun kenar olduğu unutulmamalıdır.

45–45–90 üçgeni, ikizkenar dik üçgendir. Dik kenarlar eşittir, hipotenüs bu dik kenarın kök 2 katıdır. Kare köşegeniyle karşılaşınca bu oran hemen devreye girer. 30–60–90 üçgeninde ise kısa kenar 30 derecenin karşısındadır, hipotenüs kısa kenarın iki katıdır, 60 derecenin karşısındaki uzun dik kenar kısa kenarın kök 3 katıdır. Eşkenar üçgende yükseklik çizildiğinde bu oran kendiliğinden ortaya çıkar; çünkü 60 derecelik açı ikiye bölünür ve taban iki eş parçaya ayrılır.

İkizkenar üçgen de özel üçgenlerin ana ailesindendir. İki kenar eşitse karşısındaki taban açıları eşittir. Tepe noktasından tabana indirilen doğru, uygun durumda hem açıortay hem kenarortay hem de yükseklik olur. Bu üç görevin aynı anda kullanılabilmesi, ikizkenar yapı açıkça verildiğinde geçerlidir. Sıradan bir üçgende bir çizginin hem diklik hem orta nokta hem açı eşitliği oluşturduğunu kendiliğinden varsaymak hatadır.

Eşkenar üçgende bütün kenarlar eşit ve bütün açılar 60 derecedir. Alan, yükseklik ve çevre sorularında eşkenarın düzenli yapısı büyük kolaylık sağlar. Yükseklik, kenarı ikiye böldüğü için içinde iki tane 30–60–90 üçgeni oluşur. Böylece yüksekliğin kenara bağlı değeri ve alan ilişkisi hızlı kurulabilir. Özel üçgenlerde başarı, oranları ezberlemenin yanında şeklin hangi özel aileye girdiğini doğru teşhis etmeye bağlıdır. Diklik işareti, eş kenar çizgisi, 30–60–90 açıları, kare köşegeni veya eşkenar yüksekliği gibi ipuçları görüldüğünde önce özel yapı tanınır, sonra oran uygulanır.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.1.7 · Üçgende Alan

Üçgende Alanı Taban, Yükseklik ve Oranla Okuma

KISACA

Üçgende alan, taban ile o tabana ait yüksekliğin çarpımının yarısıdır. Bu yüzden hangi kenarın taban seçildiği kadar, yüksekliğin o tabana dik inmesi de önemlidir. Yükseklik üçgenin içinde olmak zorunda değildir; geniş açılı üçgenlerde tabanın uzantısına da inebilir. Aynı yüksekliğe sahip üçgenlerin alanları tabanları oranındadır; tabanları eşit olan üçgenlerin alanları ise yükseklikleri oranındadır. Kenarortay, bir üçgeni alanları eşit iki üçgene ayırır. Benzer üçgenlerde alan oranı, benzerlik oranının karesidir. Eşkenar ve dik üçgenlerde alan, özel oranlarla daha hızlı bulunabilir. Alan sorusunda doğrudan formül aramadan önce aynı yükseklik, ortak taban ve oran ilişkileri incelenmelidir.

Üçgende alanın temel formülü, taban çarpı yükseklik bölü iki biçimindedir. Burada taban herhangi bir kenar seçilebilir; fakat yüksekliğin mutlaka seçilen tabana dik olması gerekir. Bir kenarın uzunluğu verilmiş diye otomatik taban seçmek bazen yeterli olmaz, çünkü o kenara ait yükseklik görünmeyebilir. Şekilde diklik işareti varsa bu yükseklik doğrudan kullanılır. Diklik dışarıya düşmüşse, özellikle geniş açılı üçgende, yükseklik tabanın uzantısına inebilir ve yine alan hesabında geçerlidir.

Alan sorularının büyük kısmı yalnızca sayısal formül değil, oran mantığı ister. Aynı yüksekliği paylaşan iki üçgende alanlar taban uzunluklarıyla orantılıdır. Aynı tabanı paylaşan iki üçgende ise alanlar yükseklikleriyle orantılıdır. Bir üçgenin içinde aynı tepe noktasından tabana inen parçalarla oluşturulan küçük üçgenler aynı yüksekliğe sahipse, alan oranı doğrudan taban parçalarının oranı olur. Bu nedenle taban üzerinde bölünmüş uzunluklar, alanı bulmak için güçlü ipucudur.

Kenarortay alanı eşit böler; çünkü karşı kenarı iki eş parçaya ayırır ve oluşan iki üçgen aynı yüksekliği kullanır. Açıortay ise genel durumda alanı eşit bölmez; ancak karşı kenardaki parçaların oranı kadar alan oranı verir. Benzer üçgenlerde alan ilişkisi daha farklıdır. Benzerlik oranı k ise alan oranı k^2 kare olur. Bu, uzunlukla alanın aynı oranda değişmediğini gösterir. Kenarlar iki katına çıkıyorsa alan dört katına çıkar.

Özel üçgenler alan hesabını sadeleştirir. Dik üçgende dik kenarlar birbirine dik olduğu için biri taban, diğeri yükseklik alınabilir. Eşkenar üçgende yükseklik çizildiğinde iki tane 30–60–90 üçgeni oluşur; kenarı a olan eşkenarın yüksekliği $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ kök 3 bölü 2, alanı $a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ kök 3 bölü 4 olarak kullanılabilir. Ancak formül ezberi yerine yapıyı görmek daha güvenlidir. Soruda ortak taban, ortak yükseklik, kenarortay, benzerlik veya özel üçgen işareti varsa alan önce oranla, sonra gerekiyorsa sayısal hesapla bulunmalıdır.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.1.8 · Üçgende Benzerlik

Üçgende Benzerlikte Eş Açılar ve Oranlı Kenarlar

KISACA

Üçgende benzerlik, açıları eşit olan üçgenlerin karşılıklı kenarlarının aynı oranda olmasıdır. Benzer üçgenlerde şekiller aynı biçimi korur, yalnızca büyüklük değişir. Açı-açı benzerliği en sık kullanılan yoldur; iki açının eşitliği üçüncü açığı da eşit yapar. Paralel doğru, ortak açı, ters açı ve ikizkenar yapısı benzerliği kuran başlıca ipuçlarıdır. Benzerlik oranı, karşılıklı kenarların oranıdır ve hangi kenarın hangi açı karşısında durduğu dikkatle eşleştirilmelidir. Uzunluk oranı k ise çevre oranı da k , alan oranı ise k^2 kare olur. Soruda iç içe üçgenler, paralel kesitler veya bölünmüş kenarlar varsa önce benzer üçgenler işaretlenmeli, sonra orantı kurulmalıdır.

Üçgende benzerlik, iki üçgenin açı ölçülerinin aynı, karşılıklı kenarlarının orantılı olmasıdır. Eşlikten farklı olarak benzerlikte büyüklük değişebilir; şeklin biçimi korunur. Bu nedenle benzer üçgenlerde bir kenar iki katına çıkmışsa karşılık gelen bütün uzunluklar iki katına çıkar. Çözümün ilk adımı, hangi üçgenlerin benzer olduğunu kanıtlayacak açı eşitliklerini bulmaktır. Açı-açı benzerliği en pratik ölçüttür; iki açı eşitse üçgenlerin üçüncü açıları da eşit olur ve benzerlik kurulur.

Benzerliği doğuran en yaygın ipucu paralelliktir. Bir üçgende bir kenara paralel çizilen doğru, küçük üçgen ile büyük üçgen arasında açı eşitlikleri oluşturur. Ortak açı zaten aynıdır; paralellikten gelen yöndeş veya iç ters açılar ikinci eşitliği verir. Kesişen doğrularda ters açılar, iç içe üçgenlerde ortak köşe açısı, ikizkenar veya eşkenar yapıda eş taban açıları da benzerliği destekleyebilir. Şekilde benzer üçgenleri ayırmak için aynı açılara zihinde aynı işareti vermek oran kurmayı kolaylaştırır.

Benzerlikte en kritik nokta karşılıklı kenar eşleştirmesidir. Aynı açının karşısındaki kenarlar birbirine karşılık gelir. Bu eşleştirme yanlış yapılırsa oran doğru görünse bile sonuç hatalı çıkar. Küçük üçgendeki bir kenar, büyük üçgendeki hangi kenarla aynı konumdaysa onunla oranlanır. Oran kurulduktan sonra bilinmeyen uzunluk çapraz çarpımla bulunabilir. Eğer bütün kenarlar aynı oranda büyüyorsa çevre de aynı oranda büyür.

Alan benzerlikte ayrı düşünülür. Uzunluk oranı k olan iki benzer üçgenin alan oranı k^2 kare olur. Çünkü alan iki boyutlu bir ölçüdür; hem taban hem yükseklik aynı oranda değişir. Bu bilgi özellikle alanı verilen benzer üçgenlerde eksik kenarı bulmak için kullanılır. KPSS tarzı sorularda benzerlik çoğu zaman birden fazla oranı aynı anda bağlar. Sağlam çözüm, önce benzer üçgenleri adlandırmak, sonra karşılıklı kenarları sıraya koymak, en son sayısal oranı yazmaktır. Bu sıra, şeklin karmaşıklığını azaltır ve yanlış kenar eşleştirmesini engeller.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.1.9 · Üçgende Açı–Kenar Bağlılıları

Üçgende Büyük Açı, Büyük Kenar ve Üçgen Eşitsizliğı

KISACA

Üçgende açı–kenar bağıntıları, üçgenin ölçülerini karşılaştırmaya yarar. Bir üçgende büyük açının karşısında büyük kenar, küçük açının karşısında küçük kenar bulunur. Eşit açılarda karşısındaki kenarlar eşit, eşit kenarların karşısındaki açılar eşittir. Bu ilişki, uzunluk verilmeden hangi kenarın daha büyük olduğunu buldurabilir. Üçgen eşitsizliğı de temel bir sınırdır: Herhangi iki kenarın toplamı üçüncü kenardan büyük, farklarının mutlak değeri üçüncü kenardan küçük olmalıdır. Bir kenarın alabileceğı değer aralığı bu iki sınırla belirlenir. Açı ölçüsü büyüdükçe karşı kenarın büyüdüğünü görmek, özellikle ikizkenar, özel üçgen ve bilinmeyenli uzunluk sorularında karşılaştırma yapmayı kolaylaştırır.

Üçgende açı–kenar bağıntısı, açı ile karşısındaki kenar arasında doğrudan bir karşılaştırma kurar. Bir üçgende en büyük açı hangi köşedeysse, onun karşısındaki kenar en büyüktür. En küçük açının karşısındaki kenar da en küçüktür. Bu ilişki ölçü hesabı yapmadan sıralama yapmayı sağlar. Örneğin bir üçgenin açıları 40, 60 ve 80 derece ise en uzun kenar 80 derecenin karşısındadır. Aynı biçimde iki açı eşitse, bu açılarda karşısındaki kenarlar eşittir; bu durum üçgeni ikizkenar yapar.

Bu bağıntı ters yönde de çalışır. Kenar uzunlukları karşılaştırılmışsa, açılar da karşılaştırılabilir. En uzun kenarın karşısındaki açı en büyüktür. Bu bilgi özellikle şekilde uzunluklar işaretlenmiş fakat açı istenmiş sorularda kullanılır. Ancak karşılaştırma, her zaman karşı kenar üzerinden yapılmalıdır. Bir açının komşu kenarlarından biri uzun diye o açının büyük olduğu söylenemez; açı, kendisinin karşısında duran kenarla ilişkilidir.

Üçgen eşitsizliğı, üç kenarın gerçekten üçgen oluşturup oluşturamayacağını belirler. Herhangi iki kenarın toplamı üçüncü kenardan büyük olmalı, iki kenarın farkı ise üçüncü kenardan küçük kalmalıdır. Üçüncü kenarın alabileceğı değer aralığı, verilen iki kenarın farkından büyük ve toplamından küçük değerlerdir. Örneğin iki kenar 5 ve 9 ise üçüncü kenar 4'ten büyük, 14'ten küçük olmalıdır. Kenar tam sayı isteniyorsa bu aralıktaki tam sayılar ayrıca seçilir. Uç değerler dahil edilmez; çünkü fark veya toplam eşitliğı üçgeni düz çizgiye indirir.

Açı–kenar bağıntıları özel üçgenlerle birleştğinde daha hızlı sonuç verir. İkizkenarda eş kenarların karşısındaki açılar eşittir; eşkenarda bütün kenarlar ve açılar eşittir. Dik üçgende hipotenüs, 90 derecenin karşısında olduğu için en uzun kenardır. Geniş açılı üçgende geniş açının karşısındaki kenar bütün diğer kenarlardan büyüktür. Çözümde önce hangi açı hangi kenarın karşısında duruyor sorusu cevaplanır, sonra eşitlik veya büyüklük ilişkisi yazılır. Bu yöntem, şekle bakarak tahmin etme alışkanlığının önüne geçer.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.2.1 - Çokgenler

Çokgenlerde İç Açı, Dış Açı ve Köşegen Mantığı

KISACA

Çokgen, doğru parçalarının uç uca birleşmesiyle oluşan kapalı şekildir. Üçgenden sonra gelen dörtgen, beşgen, altıgen gibi şekiller kenar sayılarına göre adlandırılır. n kenarlı bir çokgenin iç açılar toplamı n eksi 2 tane üçgenin toplamına eşittir; bu nedenle formül n eksi 2 çarpı 180 derecedir. Dış açılar toplamı, dışbükey çokgenlerde her zaman 360 derecedir. Düzgün çokgende bütün kenarlar ve bütün iç açılar eşittir; bir iç açı, toplam iç açının kenar sayısına bölünmesiyle bulunur. Bir dış açı ise 360 derecenin kenar sayısına bölümüdür. Köşegen sayısı n çarpı n eksi 3 bölü 2 biçiminde hesaplanır. Çokgen sorularında önce şeklin düzgün olup olmadığı ve istenenin iç açı mı dış açı mı olduğu belirlenmelidir.

Çokgen, en az üç doğru parçasının uç uca birleşerek kapalı bir şekil oluşturmasıdır. Kenar sayısı arttıkça ad değişir: üçgen, dörtgen, beşgen, altıgen gibi. Çokgen sorularında ilk ayırım dışbükey ve düzgün çokgen üzerinden yapılır. Dışbükey çokgende iç açılar 180 dereceden küçüktür ve şekil içeri doğru kırılmaz. Düzgün çokgende ise bütün kenarlar ve bütün iç açılar eşittir. Her düzgün çokgen dışbükeydir, fakat her dışbükey çokgen düzgün değildir.

n kenarlı bir çokgenin iç açılar toplamı n eksi 2 çarpı 180 derecedir. Bu formülün nedeni, bir köşeden çizilen köşegenlerle çokgenin n eksi 2 tane üçgene ayrılabilmesidir. Üçgenlerin her biri 180 derece verdiği için toplam böyle oluşur. Örneğin beşgende iç açılar toplamı 3 çarpı 180, yani 540 derecedir. Düzgün beşgende her iç açı 540 bölü 5 ile bulunur. Şekil düzgün değilse toplam bilinir ama tek tek açılar eşit kabul edilemez.

Dış açılar toplamı dışbükey çokgenlerde 360 derecedir. Düzgün çokgende bütün dış açılar eşit olduğundan bir dış açı 360 bölü n olur. İç açı ile aynı köşedeki dış açı bütünlerdir; yani toplamı 180 derecedir. Bu yüzden düzgün çokgende bir dış açı biliniyorsa kenar sayısı, 360'ın bu dış açıya bölünmesiyle bulunabilir. İç açı verilmişse önce dış açı 180'den çıkarılır, sonra aynı işlem uygulanır. Bu yöntem kenar sayısı sorularında oldukça hızlıdır.

Köşegen, komşu olmayan iki köşeyi birleştiren doğru parçasıdır. Bir köşeden n eksi 3 köşegen çizilebilir; çünkü köşenin kendisi ve iki komşusu köşegen oluşturmaz. Tüm köşeler için bu sayı n ile çarpılır, fakat her köşegen iki kez sayıldığı için sonuç ikiye bölünür. Böylece toplam köşegen sayısı n çarpı n eksi 3 bölü 2 olur. Çokgen sorularında istenen şey açı toplamı, tek açı, dış açı, kenar sayısı veya köşegen sayısı olabilir. İlk karar, çokgenin düzgün olup olmadığıdır; ikinci karar ise toplam mı tek ölçü mü arandığıdır.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.2.2 · Dörtgenler

Dörtgenlerde Açı Toplamı, Köşegen ve Alan Okuma

KISACA

Dörtgen, dört kenarlı kapalı şekildir ve iç açılar toplamı 360 derecedir. Bu bilgi kare, dikdörtgen, paralelkenar, eşkenar dörtgen, yamuk ve deltoid gibi bütün özel dörtgenlerin ortak başlangıcıdır. Genel dörtgende karşı kenarların paralel veya eşit olduğu kendiliğinden varsayılmaz; bu özellikler yalnızca şekil işareti ya da konu türü verildiğinde kullanılır. Bir dörtgen köşegenle iki üçgene ayrılabilir, bu yüzden birçok açı ve alan sorusu üçgen bilgisine döner. Paralelkenarda karşı açılar eşit, komşu açılar bütünlerdir. Dikdörtgen ve karede tüm açılar 90 derecedir. Dörtgen sorularında önce verilen özel aile belirlenmeli, sonra açı, kenar, köşegen ve alan bağıntıları bu aileye göre uygulanmalıdır.

Dörtgenlerin ortak kuralı, iç açılar toplamının 360 derece olmasıdır. Bu sonuç, bir köşegen çizildiğinde dörtgenin iki üçgene ayrılmasından gelir. Her üçgen 180 derece olduğuna göre iki üçgen toplamda 360 derece verir. Genel bir dörtgende yalnızca bu toplam garanti edilir; karşı kenarlar eşit, paralel veya köşegenler özel özellikli kabul edilemez. Soruda şeklin adı verilmişse veya paralellik, eşitlik, diklik işaretleri gösterilmişse özel kurallara geçilir.

Dörtgenler ailesinde özel şekiller, ek özellikleriyle ayrılır. Paralelkenarda karşı kenarlar paralel ve eşittir, karşı açılar eşittir, komşu açılar bütünlerdir. Dikdörtgen, bütün açıları 90 derece olan paralelkenardır; köşegenleri eşittir ve birbirini ortalar. Kare, hem dikdörtgen hem eşkenar dörtgen özelliklerini taşır; bütün kenarlar eşit, bütün açılar diktir. Eşkenar dörtgende bütün kenarlar eşittir, köşegenler birbirini dik keser ve açıları böler. Yamukta en az bir çift karşı kenar paraleldir; deltoidde ise komşu iki kenar çifti eşittir.

Alan sorularında dörtgenin türü belirleyicidir. Paralelkenarın alanı taban çarpı yükseklik, dikdörtgenin alanı kısa kenar çarpı uzun kenar, karenin alanı kenarın karesi, yamuğun alanı paralel tabanlar toplamının yarısı çarpı yükseklik olarak kullanılır. Eşkenar dörtgen ve deltoidde köşegenler üzerinden alan kurmak çoğu zaman kolaydır; köşegenler çarpımının yarısı alanı verir. Fakat bu formüllerin her biri kendi şekil koşuluna bağlıdır. Her dörtgende köşegenleri çarpıp ikiye bölmek geçerli değildir.

Dörtgen sorularını güvenli çözmek için şeklin adını ve verilen işaretleri birlikte okumak gerekir. Paralellik oku varsa açı taşınabilir; eş kenar işareti varsa ikizkenar veya özel dörtgen ilişkisi doğar; diklik işareti varsa dik üçgen kurulabilir. Köşegen çizmek, dörtgeni üçgenlere ayırdığı için özellikle açı ve alan sorularında işe yarar. Genel dörtgen kuralı 360 dereceyle başlar, özel dörtgen kuralları ise ancak ek bilgiyle devreye girer. Bu sınır korunursa fazla varsayım yapma hatası azalır.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.2.3 · Paralelkenar–Eşkenar–Dörtgen

Paralelkenar ve Eşkenar Dörtgende Kenar, Açı ve Köşegenler

KISACA

Paralelkenar, karşılıklı kenarları paralel olan dörtgendir. Karşı kenarları eşit, karşı açıları eşit, komşu açıları bütünlerdir. Köşegenleri birbirini ortalar; bu özellik uzunluk sorularında orta nokta ilişkisi kurdurur. Alanı taban ile o tabana ait yüksekliğin çarpımıdır. Eşkenar dörtgen, bütün kenarları eşit olan paralelkenardır. Bu nedenle paralelkenarın karşı açı ve köşegenleri ortalama özelliklerini taşır, ayrıca köşegenleri birbirini dik keser ve açıları ikiye böler. Eşkenar dörtgende alan, taban-yükseklikle bulunabileceği gibi köşegenler çarpımının yarısıyla da bulunabilir. Soruda paralellik okları, eş kenar işaretleri ve köşegenlerin kesişimi birlikte verilirse, hangi özelliğin hangi dörtgene ait olduğu dikkatle ayrılmalıdır.

Paralelkenar, karşılıklı kenarları paralel olan dörtgendir. Bu tanım, birçok sonucu beraberinde getirir. Karşı kenarlar eşittir, karşı açılar eşittir, komşu açılar ise bütünlerdir. Yani bir iç açı verilirse yanındaki açı 180 dereceden çıkarılarak bulunabilir, karşısındaki açı ise ona eşittir. Paralel doğruların kesenle oluşturduğu açı ilişkileri, paralelkenar içinde sürekli kullanılır. Bu nedenle şekil üzerinde paralellik okları görüldüğünde açı taşımak mümkündür.

Paralelkenarın köşegenleri birbirini ortalar. İki köşegen kesiştiğinde, her köşegen iki eş parçaya ayrılır. Bu bilgi, köşegen parçalarıyla verilen bilinmeyenli uzunluk sorularında doğrudan denklem kurdurur. Fakat paralelkenarda köşegenler genel olarak eşit olmak zorunda değildir ve dik kesişmek zorunda değildir. Bu özellikler dikdörtgen, kare veya eşkenar dörtgen gibi daha özel yapılarda ortaya çıkar. Bu yüzden yalnızca paralelkenar bilgisiyse köşegenlere gereğinden fazla özellik yüklenmemelidir.

Paralelkenarın alanı taban çarpı yüksekliktir. Yükseklik, seçilen tabana dik inen uzaklıktır; yan kenarın uzunluğu yükseklik yerine kullanılamaz. Şekil eğik çizilmiş olsa bile alan mantığı değişmez. Aynı taban ve aynı yükseklik arasında kalan paralelkenarların alanları eşittir. Bu ilişki, özellikle paralel doğrular arasında verilen şekillerde alan karşılaştırmasını kolaylaştırır.

Eşkenar dörtgen, bütün kenarları eşit olan paralelkenardır. Paralelkenarın bütün temel özelliklerini taşır; ayrıca köşegenleri birbirini dik keser ve köşe açılarını ikiye böler. Bu nedenle eşkenar dörtgenin köşegenleri çizildiğinde içeride dik üçgenler oluşur. Uzunluk sorularında Pisagor, açı sorularında açıortay ilişkisi devreye girebilir. Alan ise taban-yükseklikle veya köşegenler çarpımının yarısıyla bulunabilir. Soruda dört kenarın eşitliği verilmişse eşkenar dörtgen özellikleri açılır; yalnız karşı kenar paralelliği verilmişse paralelkenar sınırında kalmak gerekir. Bu ayırım, doğru formülü seçmenin anahtarıdır.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.2.4 · Dikdörtgen–Kare

Dikdörtgen ve Karede Köşegen, Alan ve Özel Üçgenler

KISACA

Dikdörtgen, bütün açıları 90 derece olan paralelkenardır. Karşı kenarları eşit ve paraleldir; köşegenleri eşittir ve birbirini ortalar. Dikdörtgende alan kısa kenar ile uzun kenarın çarpımı, çevre ise iki kısa ve iki uzun kenarın toplamıdır. Köşegen çizildiğinde iki eş dik üçgen oluşur ve Pisagor bağıntısı uygulanır. Kare, bütün kenarları eşit ve bütün açıları 90 derece olan özel dörtgendir. Hem dikdörtgenin hem eşkenar dörtgenin özelliklerini taşır. Karenin köşegenleri eşit uzunlukta, birbirini ortalar, dik kesişen ve açıları ikiye bölen doğru parçalarıdır. Kare köşegeni, kenarın kök 2 katıdır. Bu konu, dik üçgen ve özel üçgen bilgisiyle birlikte çözülmelidir.

Dikdörtgen, bütün iç açıları 90 derece olan paralelkenardır. Paralelkenar olduğu için karşı kenarları eşit ve paraleldir, karşı açıları eşittir, köşegenleri birbirini ortalar. Dikdörtgeni özel yapan ek özellik ise köşegenlerinin eşit olmasıdır. Bir dikdörtgende köşegen çizildiğinde iki eş dik üçgen oluşur. Bu nedenle kenarlar ve köşegen arasında Pisagor bağıntısı kurulur. Kısa kenar a , uzun kenar b ise köşegenin karesi $a^2 + b^2$ karedir. Köşegen sorularında hipotenüsün köşegen olduğunu görmek gerekir.

Dikdörtgenin alanı kısa kenar ile uzun kenarın çarpımıdır. Çevresi iki kısa kenar ve iki uzun kenarın toplamıdır. Bazı sorularda dikdörtgenin içinde paralel kesitler, katlama veya köşegenle oluşan üçgenler verilir. Bu durumlarda dik açı bilgisi, eş uzunluklar ve Pisagor birlikte kullanılır. Dikdörtgende köşegenler açıları ikiye bölmek zorunda değildir; bu özellik karede veya eşkenar dörtgende özel koşullarla ortaya çıkar. Dolayısıyla dikdörtgen için güvenilir köşegen bilgisi eşitlik ve birbirini ortalamadır.

Kare, bütün kenarları eşit ve bütün açıları dik olan dörtgendir. Kare aynı anda dikdörtgen, paralelkenar ve eşkenar dörtgen özelliklerini taşır. Köşegenleri eşittir, birbirini ortalar, dik kesişir ve köşe açılarını ikiye böler. Bir karenin köşegeni çizildiğinde iki tane 45–45–90 üçgeni oluşur. Bu yüzden köşegen, kenarın kök 2 katıdır; tersine köşegen verilirse kenar, köşegen bölü kök 2 olarak düşünülür.

Kare alanı kenarın karesiyle, çevresi dört kenarın toplamıyla bulunur. Köşegenler üzerinden alan da kurulabilir; karede köşegenler birbirine eşit ve dik olduğundan köşegenler çarpımının yarısı alanı verir. Ancak pratikte kenar üzerinden alan daha doğrudan olabilir. Dikdörtgen–kare sorularında önce şeklin kare mi yalnızca dikdörtgen mi olduğu kesinleştirilmelidir. Tüm kenarlar eşit değilse kare köşegeni oranı kullanılamaz; bütün açılar dik olsa bile kenar eşitliği ayrıca verilmelidir. Bu dikkat, özel dörtgenlerin birbirine karışmasını önler.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.2.5 · Yamuk–Deltoid

Yamuk ve Deltoidde Paralel Taban, Orta Taban ve Köşegen Alanı

KISACA

Yamuk, en az bir çift karşı kenarı paralel olan dörtgendir. Paralel kenarlar taban olarak düşünülür ve yükseklik bu tabanlar arasındaki dik uzaklıktır. Yamuk alanı, paralel tabanların toplamının yarısı ile yüksekliğin çarpımıdır. Orta taban, paralel tabanların aritmetik ortalamasına eşittir. İkizkenar yamukta yan kenarlar eşit, taban açıları eşit ve köşegenler eşittir. Deltoid ise komşu iki kenar çifti eşit olan dörtgendir. Köşegenlerinden biri diğerini dik keser ve uygun simetri eksenini üzerinde açıları böler. Deltoidin alanı köşegenler çarpımının yarısıyla bulunabilir. Bu konuda başarı, yamuğun paralel taban mantığını deltoidin eş komşu kenar ve dik köşegen mantığından ayırmaya dayanır.

Yamuk, karşılıklı kenarlarından en az bir çifti paralel olan dörtgendir. Paralel olan kenarlar taban adını alır. Yamuğun yüksekliği, bu iki taban arasındaki dik uzaklıktır; yan kenar eğikse yükseklik yerine kullanılamaz. Alan formülü, alt taban ile üst tabanın toplamının yarısı çarpı yüksekliktir. Bu formül, yamuğun paralel tabanlar arasında kalan şeklinin, ortalama taban uzunluğu ile yükseklik üzerinden ölçülmesine dayanır. Soruda tabanlardan biri, alan ve yükseklik verilmişse eksik taban bu ilişkiyle bulunur.

Yamukta orta taban, yan kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçasıdır ve paralel tabanlara paraleldir. Uzunluğu, iki tabanın toplamının yarısına eşittir. Bu özellik, tabanların toplamı veya biri bilinmediğinde pratik bir denklem sağlar. İkizkenar yamukta yan kenarlar eşittir; taban açıları eşittir ve köşegenler eşit uzunluktadır. Ancak her yamuk ikizkenar değildir. Yan kenar eşitliği verilmemişse taban açılarını eşit veya köşegenleri eşit kabul etmek hatadır.

Deltoid, komşu iki kenar çifti eşit olan dörtgendir. Uçurtma biçimindeki bu yapıda bir köşegen simetri eksenini gibi davranabilir; diğer köşegeni dik keser ve onu iki eş parçaya ayırabilir. Ayrıca simetri doğrusu üzerindeki köşe açılarını ikiye böler. Deltoidde alan, köşegenler çarpımının yarısıyla bulunur. Bu alan formülü, köşegenlerin dik kesişmesiyle oluşan dik üçgenlerin alanlarının toplamı olarak düşünülebilir.

Yamuk ve deltoid sorularında şeklin hangi aileye ait olduğu doğru saptanmalıdır. Yamukta anahtar kelime paralel tabandır; deltoidde anahtar komşu eş kenarlar ve dik köşegen yapısıdır. Yamuk alanı için taban–yükseklik, deltoid alanı için köşegen çarpımı daha doğal yoldur. Fakat sorular bazen bu iki konuyu üçgen bilgisiyle birleştirir. Yamuğun içine yükseklik indirildiğinde dik üçgenler, deltoidin köşegenleri çizildiğinde yine dik üçgenler oluşur. Bu nedenle özel dörtgen bilgisi ile Pisagor ve açı ilişkileri birlikte düşünülmelidir.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.3.1 - Çemberde Açı

Çemberde Merkez, Çevre, Teğet ve Kesen Açıları

KISACA

Çemberde açı soruları, açının gördüğü yayla kurduğu ilişkiye dayanır. Merkez açı, köşesi çemberin merkezinde olan açıdır ve ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşittir. Çevre açı, köşesi çember üzerinde olan açıdır ve gördüğü yayın yarısı kadardır. Aynı yayı gören çevre açılar eşittir. Çapı gören çevre açı 90 derecedir; bu bilgi çember içinde dik üçgen kurdurur. Teğet ile kiriş arasındaki açı, gördüğü yayın yarısına eşittir. İki kirişin çember içinde kesişmesi veya iki kesenin dışarıda kesişmesi durumunda açı, ilgili yay ölçülerinin toplamı ya da farkı üzerinden bulunur. Soruda önce açının köşesinin merkezde, çember üzerinde, içeride veya dışarıda olduğu belirlenmelidir.

Çemberde açı konusunun temelinde açı ile yay arasındaki ilişki vardır. Merkez açı, köşesi çemberin merkezinde olan açıdır. Gördüğü yayın ölçüsüne eşittir; merkezden çıkan iki yarıçap hangi yayı sınırlıyorsa açı ölçüsü o yayla aynı alınır. Çevre açı ise köşesi çemberin üzerinde olan açıdır ve gördüğü yayın yarısı kadardır. Bu nedenle aynı yayı gören çevre açılar eşittir. Şekilde farklı noktalardan çizilmiş açılar aynı yayı kesiyorsa, açılar ayrı ayrı ölçülmeden eşit kabul edilebilir.

Çapı gören çevre açı özel bir durumdur. Çapın uçlarını gören çevre açı 90 derecedir. Çünkü çap, 180 derecelik yarım çember yayı oluşturur ve çevre açı bunun yarısıdır. Bu bilgi, çember içinde dik üçgen yakalamanın en pratik yoludur. Şekilde bir kenar çap olarak verilmişse ve üçüncü nokta çember üzerindeyse, o noktadaki açı dik açı olarak işaretlenebilir. Ardından Pisagor veya özel dik üçgen oranları devreye girebilir.

Teğet-kiriş açısı, teğet doğrusu ile çember üzerindeki bir kiriş arasında oluşur ve gördüğü yayın yarısına eşittir. Bu ilişki çevre açıyla aynı yay mantığını taşır. İki kiriş çemberin içinde kesiştiğinde oluşan açının ölçüsü, gördüğü karşılıklı yayların toplamının yarısıdır. Dışarıdan çizilen iki kesen veya teğet-kesen ilişkisinde ise dış açının ölçüsü, büyük yay ile küçük yayın farkının yarısıdır. Bu kuralların karışmaması için açının köşesinin nerede olduğu ilk kontrol noktasıdır.

Çemberde açı sorularında şeklin kalabalığı aldatıcı olabilir. Önce merkez işaretlenir, yarıçaplar eşit düşünülür, sonra açının köşesi belirlenir. Köşe merkezdeyse merkez açı, çember üzerindeyse çevre açı, teğet üzerinde ise teğet-kiriş ilişkisi, içeride veya dışarıda kesişim varsa toplam-fark yay ilişkisi kullanılır. Yay ölçüleriyle açı ölçülerini aynı satırda takip etmek, yarı alma veya fark alma hatasını azaltır. Çemberde ana soru çoğu zaman açı değil, açının gördüğü yayı doğru seçmektir.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.3.2 - Çemberde Uzunluk

Çemberde Kiriş, Teğet, Kesen ve Kuvvet Bağlantıları

KISACA

Çemberde uzunluk, yarıçap, çap, kiriş, teğet ve kesen parçaları arasındaki bağlantılarla çözülür. Yarıçaplar eşittir ve teğet, değme noktasında yarıçapa diktir. Bu diklik çoğu kez dik üçgen kurdurur. Merkezden kirişe indirilen dikme kirişi iki eş parçaya böler; eş kirişler merkezden eş uzaklıktadır. Dış noktadan çembere çizilen iki teğet parçası birbirine eşittir. Aynı dış noktadan çizilen kesenlerde dış parça ile tüm kesenin çarpımı birbirine eşittir; teğet-kesen durumunda teğetin karesi dış parça ile tüm kesenin çarpımına eşittir. Çemberde uzunluk sorusunda önce hangi doğru parçasının kiriş, hangisinin teğet veya kesen olduğu ayrılmalı, sonra uygun çarpım ya da dik üçgen bağlantısı kurulmalıdır.

Çemberde uzunluk sorularının ilk bilgisi, aynı çemberin bütün yarıçaplarının eşit olmasıdır. Merkezden çember üzerindeki herhangi bir noktaya çizilen doğru parçası yarıçaptır. Çap ise merkezden geçen ve çemberin iki noktasını birleştiren en uzun kiriştir; uzunluğu yarıçapın iki katıdır. Bir teğet doğru, çembere yalnız bir noktada dokunur ve değme noktasına çizilen yarıçapa diktir. Bu diklik, teğet sorularında dik üçgen kurmanın ana yoludur.

Kiriş, çemberin iki noktasını birleştiren doğru parçasıdır. Merkezden bir kirişe indirilen dikme, kirişi iki eş parçaya böler. Bu nedenle kiriş uzunluğu veya merkeze uzaklık verilmişse, yarıçapla birlikte dik üçgen oluşur. Eş kirişler merkezden eş uzaklıktadır; merkeze daha yakın kiriş daha uzundur. Bu ilişki, kirişleri yalnız şekle bakarak değil, merkeze olan dik uzaklıkla karşılaştırmayı sağlar.

Dış noktadan çembere çizilen iki teğet parçası eşittir. Aynı dış noktadan gelen teğetler farklı yönlerde uzansa bile başlangıç noktaları ortak ve değme noktaları çember üzerinde olduğundan uzunlukları eşit alınır. Bu bilgi özellikle çokgen içine çizilmiş çemberlerde ve iki teğetli şekillerde çevre hesabını kolaylaştırır. Teğet-kesen bağlantısında ise dış noktadan çizilen teğetin karesi, dış parça ile kesenin tamamının çarpımına eşittir. İki kesen varsa, her biri için dış parça çarpı tüm kesen eşitliği kurulur.

Kirişlerin çember içinde kesişmesi de çarpım bağlantısı doğurur. Kesişim noktasından kirişin iki ucuna giden parçaların çarpımı, diğer kirişin parçalarının çarpımına eşittir. Bu bağlantıda tüm doğru parçası değil, içteki iki parça kullanılır; dış kesen bağlantısında ise dış parça ve tüm kesen kullanılır. Çemberde uzunluk sorularında hangi durumun kurulduğunu ayırmak önemlidir: merkez-kiriş dikliği, dıştan iki teğet eşitliği, teğet-kesen, iki kesen veya içeride kesişen kirişler. Durum doğru seçildiğinde işlem çoğu kez kısa bir oran veya çarpım eşitliğine iner.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.3.3 - Dairede Alan

Dairede Alan, Dairesel Bölge ve Sektör Hesabı

KISACA

Daire, çemberin iç bölgesiyle birlikte oluşturduğu düzlemsel şekildir. Yarıçapı r olan dairenin alanı πr^2 kare, çevresi ise $2\pi r$ olarak kullanılır. Alan sorularında yarıçapın karesi devreye girdiği için uzunluk iki katına çıkarsa alan dört katına çıkar. Daire dilimi, merkez açının gördüğü bölgedir; alanı, merkez açının 360 dereceye oranı kadar daire alanıdır. Yay uzunluğu da aynı oranla çevreden bulunur. Halkada alan, büyük daire alanından küçük daire alanının çıkarılmasıyla hesaplanır. Daire içine çizilen kare, eşkenar üçgen veya dik üçgen gibi şekillerde önce yarıçap-köşegen ilişkisi kurulmalıdır. Bu konuda en sık hata, çapı yarıçap gibi kullanmak ya da alan oranını uzunluk oranıyla karıştırmaktır.

Daire, çemberin sınırladığı iç bölgeyi de içeren şekildir. Çember yalnız sınır çizgisini anlatırken, daire alanı olan bölgeyi ifade eder. Yarıçap r ise dairenin alanı πr^2 kare, çevresi $2\pi r$ olur. Çap $2r$ olduğu için çap verildiğinde önce yarıçap bulunmalıdır. Alan formülünde r^2 kare bulunduğundan, uzunluk değişimi alana kareli yansır. Yarıçap iki katına çıkarsa alan dört katına, üç katına çıkarsa dokuz katına çıkar. Bu fark, alan oranı sorularında özellikle önemlidir.

Daire dilimi, merkez açının sınırladığı sektördür. Merkez açı 360 derecenin ne kadarıysa, dilimin alanı da dairenin alanının o kadardır. Örneğin merkez açı 90 dereceyse dilim, bütün dairenin dörtte biridir. Yay uzunluğu için de aynı oran çevreye uygulanır. Böylece sektör alanı ve yay uzunluğu aynı merkez açı oranından beslenir, fakat biri alan, diğeri uzunluk ölçüsüdür. Soruda boyalı bölge bir dilimse önce merkez açı belirlenir, sonra 360 dereceye oranlanır.

Halka alanı, iki eş merkezli daire arasında kalan bölgedir. Büyük yarıçap R , küçük yarıçap r ise alan πR^2 kare eksi πr^2 kare biçiminde düşünülür. Boyalı alan sorularında da benzer çıkarma mantığı vardır. Bir dairenin içinden kare, üçgen veya başka bir daire çıkarılıyorsa önce her parçanın alanı ayrı bulunur, sonra istenen bölge için toplama veya çıkarma yapılır. Şekilde çap, köşegen veya teğet bilgisi varsa alan hesabından önce uzunluk ilişkisi çözülmelidir.

Daire içine yerleşen özel şekillerde geometri bilgileri birleşir. Kare çember içine çizilmişse karenin köşegeni çap olabilir; bu durumda 45–45–90 üçgeniyle kenar bulunur. Eşkenar üçgende yarıçap, yükseklik ve merkez ilişkileri devreye girebilir. Dik üçgen çemberle birlikte verilmişse çapı gören çevre açı 90 derece bilgisi alan hesabına yol açabilir. Dairede alan sorularında güvenli sıra şöyledir: önce yarıçap mı çap mı verildiğini ayırmak, sonra merkez açı oranı veya çıkarılacak bölgeyi belirlemek, en son πr^2 kare hesabını uygulamak. Böylece çapı doğrudan formüle yazma ve alanı uzunluk gibi oranlama hataları önlenir.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.4.1 • Noktanın Analitik İncelenmesi

Noktanın Koordinatla Okunması ve Temel Nokta İşlemleri

KISACA

Noktanın analitik incelenmesi, geometrik bir konumu sayı düzeni içinde ifade etme becerisidir. Bir nokta genellikle parantez içinde iki değerle yazılır; ilk değer yatay eksendeki, ikinci değer düşey eksendeki konumu gösterir. Bu düzen, sadece noktayı işaretlemek için değil, iki nokta arasındaki uzaklığı, bir doğru parçasının orta noktasını, belirli bir oranda bölünen noktayı ve bazı çokgenlerin merkez ilişkilerini bulmak için de kullanılır. Temel fikir şudur: yatay değişim ile düşey değişim ayrı ayrı okunur, sonra sorunun istediği ilişkiye göre birleştirilir. Uzaklıkta Pisagor mantığı, orta noktada aritmetik ortalama, oranlı bölmede ise eksenlerdeki farkın aynı oranda paylaştırılması öne çıkar. Bu nedenle analitik geometride nokta bilgisi, sonraki doğru denklemi ve eğim konularının zemini gibi çalışır.

Noktanın analitik incelenmesinde ilk adım, koordinat düzlemini iki yönlü bir ölçme sistemi olarak okumaktır. Yatay eksen x ekseni, düşey eksen y ekseni kabul edilir ve bir nokta parantez içinde x, y biçiminde gösterilir. Bu yazımda ilk sayı noktanın sağa ya da sola ne kadar gittiğini, ikinci sayı yukarıya ya da aşağıya ne kadar çıktığını anlatır. Örneğin x değeri pozitifse nokta y ekseninin sağında, negatifse solundadır; y değeri pozitifse x ekseninin üstünde, negatifse altındadır. Eksen üzerindeki noktaların özel bir kolaylığı vardır: x ekseni üzerindeki bir noktanın y değeri sıfır, y ekseni üzerindeki bir noktanın x değeri sıfırdır. Böylece bir noktayı görmek, aslında iki ayrı sayı hareketini aynı anda okumaktır.

İki nokta arasındaki uzaklık, bu iki sayı hareketinin dik üçgen oluşturduğu düşünülerek bulunur. Noktaların x değerleri arasındaki fark yatay kenarı, y değerleri arasındaki fark düşey kenarı verir. Bu iki farkın kareleri toplanıp karekök alınır; çünkü uzaklık, bu dik üçgenin hipotenüsüdür. Burada sıranın değişmesi sonucu etkilemez, çünkü farkların karesi alınır. Asıl dikkat edilmesi gereken nokta, yatay fark ile düşey farkı karıştırmamaktır. Analitik sorularda verilen iki nokta bazen grafikte, bazen doğrudan koordinat olarak gelir; her iki durumda da önce noktaların x ve y değerleri netleştirilir.

Orta nokta işlemi daha sade bir ortalama fikrine dayanır. Bir doğru parçasının uç noktaları biliniyorsa, orta noktanın x değeri uç noktaların x değerlerinin aritmetik ortalaması, y değeri de uç noktaların y değerlerinin aritmetik ortalamasıdır. Bu yöntem, doğru parçasının tam ortasını ararken eksenleri ayrı ayrı dengelemeyi sağlar. Bir üçgenin ağırlık merkezinde de benzer bir ortalama dili kullanılır; köşe noktalarının x değerleri toplanıp üçe bölündüğünde ağırlık merkezinin x değeri, y değerleri toplanıp üçe bölündüğünde y değeri bulunur. Paralelkenar, dikdörtgen, kare ve eşkenar dörtgende ise köşegenlerin kesiştiği nokta merkez davranışı gösterir; karşılıklı köşelerin koordinat toplamalarının eşit olması bu yüzden kullanışlı bir kontrol verir.

Bir doğru parçasını belirli bir oranda bölen nokta aranırken orta nokta kuralı doğrudan yetmez; bu kez toplam yatay değişim ve toplam düşey değişim verilen orana göre paylaştırılır. İçten bölme

sorularında, bölme oranı hangi parçaya aitse o parça eksen farkından aynı payı alır. Böyle bir soruda önce iki uç nokta arasındaki x farkı okunur, sonra bu fark verilen oran parçalarına bölüştürülür. Aynı işlem y farkı için yapılır. Bu yaklaşım, formülü ezberlemekten çok daha sağlamdır; çünkü noktanın hangi uca daha yakın olduğunu da zihinde denetletir. Sonuçta noktanın analitik incelenmesi, koordinat düzleminde konumu, uzaklığı, ortayı ve oranı aynı dilde okumayı öğretir.

Nokta işlemlerinde pratik denetim alışkanlığı önemlidir. Bulunan nokta, verilen iki uç noktanın arasında olmalıysa x ve y değerleri de çoğu durumda uç değerlerin arasında kalır; dıştan bölme gibi özel bir durum yoksa bu aralık kontrolü hata yakalatır. Orta nokta, uç noktaların tam dengesi olduğu için bir koordinat uçlardan birine fazla yakın görünüyorsa işlem yeniden okunmalıdır. Oranlı bölmede ise nokta, büyük parçanın karşısındaki uca daha yakın olabilir; bu nedenle oranı sadece sayı olarak değil, konum bilgisi olarak da yorumlamak gerekir. Böyle bakıldığında analitik nokta soruları kuru formül uygulaması olmaktan çıkar; düzlem üzerinde mesafe, denge ve paylaşım fikrini birlikte çalıştıran bir çözüm dili haline gelir.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.4.2 · Analitik Düzlem

Analitik Düzlemde Eksenler, Bölgeler ve Koordinat Okuma

KISACA

Analitik düzlem, geometriyi sayılarla konuşturan iki eksenli bir sistemdir. Yatay eksen x , dikey eksen y olarak alınır; bu iki eksenin kesiştiği nokta orijindir. Bir noktanın koordinatı x, y biçiminde yazıldığında, ilk değer yatay hareketi, ikinci değer dikey hareketi gösterir. Eksenlerin işaretleri düzlemi bölgelere ayırır ve bir noktanın hangi bölgede bulunduğu koordinatların artı ya da eksi oluşundan anlaşılır. Sağ üst bölgede iki değer de pozitif, sol üstte x negatif y pozitif, sol altta ikisi de negatif, sağ altta ise x pozitif y negatiftir. Analitik düzlemi doğru okumak, sadece nokta yerleştirmek için değil, uzaklık, eğim, doğru denklemi ve grafik yorumlarında hatasız başlangıç yapmak için gereklidir.

Analitik düzlem, biri yatay biri dikey iki sayı doğrusunun birbirini dik kesmesiyle kurulur. Bu iki doğrunun kesiştiği yer orijin kabul edilir ve koordinatı $0,0$ olarak düşünülür. Yatay olan x eksenini sağa doğru pozitif, sola doğru negatif; dikey olan y eksenini yukarı doğru pozitif, aşağı doğru negatif değerler taşır. Bir nokta x, y biçiminde yazıldığında önce x eksenini boyunca yatay konum, sonra y eksenini boyunca dikey konum okunur. Bu sıralama değişmez; y değerini önce okumak, noktayı bambaşka bir yere taşır. Bu nedenle analitik düzlem sorularında ilk güvenlik adımı, apsis ve ordinatı birbirinden açıkça ayırmaktır.

Düzlem, eksenlerin oluşturduğu dört bölgeyle daha anlamlı hale gelir. Birinci bölgede x ve y pozitiftir; nokta orijinin sağında ve üstündedir. İkinci bölgede x negatif, y pozitiftir; nokta solda ama üsttedir. Üçüncü bölgede iki değer de negatiftir; nokta sol ve alt tarafta kalır. Dördüncü bölgede x pozitif, y negatiftir; nokta sağda fakat alt taraftadır. Eksen üzerindeki noktalar ise herhangi bir bölgeye değil, doğrudan eksene aittir. x eksenini üzerinde y değeri sıfırdır, y eksenini üzerinde x değeri sıfırdır. Bu bilgi, özellikle grafikten nokta seçilen sorularda hızlı bir kontrol sağlar.

Analitik düzlemde iki nokta arasındaki ilişki okunurken yatay ve dikey değişimler ayrı ayrı düşünülür. Bir noktanın diğerine göre kaç birim sağda ya da solda olduğu x değerlerinin farkından, kaç birim yukarıda ya da aşağıda olduğu y değerlerinin farkından anlaşılır. Bu farklar uzaklık hesabında bir dik üçgenin kenarları gibi kullanılır; eğim hesabında ise dikey değişimin yatay değişime oranı olarak yorumlanır. Aynı düzlem üzerinde bir doğru çizildiğinde, doğru sağa doğru yükseliyorsa eğim pozitif, sağa doğru alçalıyorsa eğim negatiftir. Yatay doğrularda eğim sıfır, dikey doğrularda eğim tanımsız kabul edilir.

Analitik düzlemde grafik yorumunun güçlü olması, cebirsel ifadeyi de daha güvenli hale getirir. Örneğin bir doğrunun x eksenini kestiği noktada y değeri sıfırdır; y eksenini kestiği noktada x değeri sıfırdır. Bir noktadan geçen doğrunun denklemi denetlenirken, noktanın x değeri denklemde yerine yazıldığında y değerinin çıkması gerekir. Böylece düzlem, sadece çizim alanı değil, aynı zamanda cebirsel işlemi kontrol eden bir düşünme aracıdır. Nokta, doğru, eğim ve alan soruları farklı görünse de

analitik düzlemde başarı aynı alışkanlığa dayanır: Önce koordinatları doğru oku, sonra yatay ve düşey bilgiyi sorunun istediği ilişkiye çevir.

Düzlem okuma becerisi, soruda verilen parçalı bilgileri birleştirirken de işe yarar. Bir nokta ikinci bölgede deniyorsa x değerinin negatif, y değerinin pozitif olması gerektiği hemen bilinir; böylece seçeneklerde işaret elemesi yapılabilir. Bir doğru orijinden geçiyorsa $0,0$ noktasını sağlamalıdır; sağlamıyorsa çizim ya da denklem yanlıştır. Bir doğru eksenleri pozitif tarafta kesiyorsa grafiğin hangi bölgelerden geçtiği tahmin edilebilir. Bu sezgisel kontroller, uzun işlem yapmadan önce sonucun yönünü gösterir ve analitik geometride hız kadar doğruluk da kazandırır.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.4.3 · Doğrunun Analitik İncelenmesi

Doğrunun Eğim, Nokta ve Koordinat İlişkisiyle İncelenmesi

KISACA

Doğrunun analitik incelenmesi, bir doğruyu yalnızca çizgi olarak değil, koordinat ve denklem ilişkisi olarak görmektir. Bir doğru en az iki farklı noktadan geçer; bu noktaların x ve y değerleri arasındaki değişim doğrunun yönünü ve eğimini belirler. Eğim, düşey değişimin yatay değişime oranıdır. Doğru sağa doğru yükseliyorsa eğim pozitif, sağa doğru alçalıyorsa negatiftir; yatay doğrunun eğimi sıfır, dikey doğrunun eğimi tanımsızdır. İki noktası bilinen bir doğru için y değerleri farkı x değerleri farkına bölünerek eğim bulunur. Bir nokta ve eğim bilindiğinde ise doğru denklemi oluşturulabilir. Bu nedenle doğruyu analitik incelemek, grafik bilgisini cebirsel bilgiyle sürekli karşılaştırmak anlamına gelir.

Doğrunun analitik incelenmesinde temel amaç, doğrunun koordinat düzlemindeki konumunu sayısal olarak okumaktır. Bir doğruyu çizmek için iki farklı nokta yeterlidir; fakat sorularda çoğu zaman doğrunun iki noktası, bir noktası ve eğimi, eksenleri kestiği noktalar ya da denklem biçimi verilir. Bu bilgilerin hepsi aynı yapıya bağlanır: doğru üzerinde ilerlerken yatay değişim ile düşey değişim arasında sabit bir oran vardır. Bu oran eğimdir. Eğim ne kadar büyükse doğru o kadar dik yükselir ya da alçar; eğimin işareti ise doğrunun yönünü gösterir.

Eğim, en sade haliyle düşey uzunluğun yatay uzunluğa oranıdır. Koordinatla yazılırken iki nokta alınır; ikinci noktanın y değerinden birinci noktanın y değeri çıkarılır, aynı sırayla x değerleri çıkarılır ve bu iki fark birbirine bölünür. Sırayı ters almak sonucu bozmaz, yeter ki y farkı hangi sırayla alındıysa x farkı da aynı sırayla alınsın. Grafik üzerinde ise çoğu zaman bir dik üçgen görmek yeterlidir. Doğrunun üzerinde iki nokta seçilir, birinden yatay, diğerinden düşey bir yardımcı çizgi düşünülür ve oluşan dik üçgende düşey kenar yatay kenara bölünür. Doğru sağa yatık biçimde yükseliyorsa oran pozitif, sola yatık biçimde yükseliyorsa negatif alınır.

Bazı doğrular özel davranır. Yatay doğrularda y değeri sabittir; x değişse bile düşey değişim sıfır olduğu için eğim sıfırdır. Dikey doğrularda x değeri sabittir; yatay değişim sıfır olduğundan eğim tanımsızdır. Bu ayrım özellikle denklem yazarken önemlidir. y eşittir sabit sayı biçimindeki doğrular yataydır, x eşittir sabit sayı biçimindeki doğrular dikeydir. Bu iki tür doğruyu, genel eğim formülünün içine zorla yerleştirmeye çalışmak hata doğurur; kendi özel anlamlarıyla okunmaları gerekir.

Bir doğru denklemi bulunduğunda, doğru üzerindeki her nokta o denklemi sağlar. Bu kontrol, analitik incelemenin en güvenilir parçasıdır. Verilen bir noktanın doğru üzerinde olup olmadığını anlamak için noktanın x değeri denklemde yerine yazılır ve çıkan y değerinin noktanın y değeriyle uyuşup uyuşmadığına bakılır. Aynı şekilde, denklem y eşittir mx artı n biçimindeyse x katsayısı eğimi, n değeri ise doğrunun y eksenini kestiği noktayı gösterir. Böylece doğruyu incelemek, eğimi, noktayı, kesişimi ve denklemi birbirini denetleyen parçalar halinde okumaktır.

Doğrunun analitik incelenmesinde paralellik ve diklik de eğim üzerinden okunur. Paralel doğrular aynı yönde ilerlediği için eğimleri eşittir. Birbirine dik doğrularda ise eğimler çarpımı eksi bir olacak biçimde ters işaretli ve çarpmaya göre ters değerler verir; bu kural yatay ve dikey doğruların özel durumları dışında kullanılır. Böylece bir doğruya paralel ya da dik geçen yeni doğrunun denklemi istenirken önce eğim belirlenir, sonra verilen nokta kullanılır. Bu bağlantı, doğruyu tek başına değil, düzlemdeki diğer doğrularla ilişkisi içinde incelemeyi sağlar.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.4.4 · Doğrunun Grafiğinin Çizimi

Doğru Grafiğini Eğim ve Eksen Kesişimleriyle Çizme

KISACA

Doğrunun grafiğini çizmek, denklemdeki bilgiyi koordinat düzlemine taşımaktır. En pratik yol, doğru üzerinde iki güvenilir nokta bulmaktır. Denklem y eşittir mx artı n biçimindeyse n değeri doğrunun y eksenini kestiği noktayı verir; eğim ise bu noktadan sonra yatay ve düşey hareketin nasıl ilerleyeceğini gösterir. Eğim pozitifse doğru sağa doğru yükselir, negatifse sağa doğru alçalır. Bir doğru eksenleri kesiyorsa x eksenini keşişimi için y sıfır, y eksenini keşişimi için x sıfır alınır. Bu iki nokta işaretlenip birleştirildiğinde grafik oluşur. Grafik çiziminde en büyük hata, eksen üzerindeki sıfır değerlerini unutmak ya da eğimin işaretini ters okumaktır.

Doğrunun grafiğinin çizimi, denklem çözmekten farklı görünse de aynı bilginin görsel karşılığıdır. Bir doğruyu güvenle çizebilmek için üzerinde iki nokta bulmak yeterlidir. Bu iki nokta doğrudan verilmiş olabilir, denklemden elde edilebilir ya da eksen kesişimleri üzerinden bulunabilir. Çizim yaparken amaç süslü bir şekil oluşturmak değildir; doğruyu hangi yönde ilerlediği, eksenleri nerede kestiği ve eğiminin nasıl davrandığı anlaşılacak biçimde yerleştirmektir. Bu yüzden grafik sorularında önce nokta avlamak, sonra eğimi yorumlamak en temiz yoldur.

Denklem y eşittir mx artı n biçimindeyse çizim oldukça hızlı başlar. Bu biçimde n değeri, x sıfırken y değerinin ne olacağını gösterir; yani doğru y eksenini 0 , n noktasında keser. Buradan sonra m eğimi okunur. Eğim bir kesir gibi düşünülebilir: pay düşey değişimi, payda yatay değişimi anlatır. Örneğin eğim pozitifse sağa doğru gidildikçe doğru yukarı çıkar; eğim negatifse sağa doğru gidildikçe aşağı iner. Payda kadar sağa gidip pay kadar yukarı ya da aşağı hareket etmek, ikinci noktayı bulmaya yarar. İki nokta belirdiğinde doğru bu noktalardan geçirilir.

Eksenleri kesen doğru sorularında başka bir kısa yol vardır. x eksenini kestiği noktada y değeri sıfırdır; y eksenini kestiği noktada x değeri sıfırdır. Denklem verildiğinde y yerine sıfır yazmak x eksenini keşişimini, x yerine sıfır yazmak y eksenini keşişimini verir. Eğer doğrunun x eksenini a , y eksenini b noktasında kestiği açıkça biliniyorsa x bölü a artı y bölü b eşittir 1 biçimi de kullanılabilir. Bu biçim, özellikle iki keşişim noktası grafikte doğrudan okunuyorsa çizimi hızlandırır.

Grafik çiziminde özel doğrular ayrıca tanınmalıdır. y eşittir sabit sayı biçimindeki doğrular yatay çizilir; çünkü y değeri değişmez. x eşittir sabit sayı biçimindeki doğrular dikey çizilir; çünkü x değeri değişmez. Orijinden geçen doğrularda y eksenini keşişimi sıfırdır ve denklem y eşittir mx biçimine iner. Bu durumda doğru $0,0$ noktasından geçer ve eğimi kadar yön kazanır. Son kontrolde, çizilen doğrunun denklemdeki bir noktayı sağlayıp sağlamadığına bakmak gerekir. Grafik, denklemlle aynı şeyi söylemiyorsa ya keşişim noktası yanlış alınmıştır ya da eğimin yönü ters çevrilmiştir.

Grafik çiziminde ölçek duygusu da önemlidir. Eğim büyükse doğru kısa yatay adımda daha fazla yükselir; eğim küçükse daha yatık görünür. Negatif eğimli doğrularda sağa giderken aşağı inme davranışı korunmalıdır. İki keşişim noktası aynı tarafta çıkıyorsa doğru yalnızca o bölgede kalacak

sanılmamalıdır; doğru iki yönde sonsuza uzanır. Bu yüzden çizim, sadece işaretlenen parça değil, bütün doğrunun yönünü temsil eder. Denklemden bulunan iki nokta uzak seçilirse çizim daha güvenli olur; birbirine çok yakın iki nokta küçük bir işaret hatasını saklayabilir.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.4.5 · Doğrunun Denklemleri

Doğru Denklemi Kurma ve Denklem Biçimlerini Okuma

KISACA

Doğrunun denklemleri, koordinat düzlemindeki bir çizginin cebirsel ifadesidir. En sık kullanılan biçim y eşittir mx artı n biçimidir; burada m eğimi, n ise y eksenini kesme değerini gösterir. Bir nokta ve eğim biliniyorsa, doğru denklemi noktanın koordinatları kullanılarak kurulabilir. İki nokta biliniyorsa önce eğim bulunur, sonra bu eğimle noktalardan biri denkleme yerleştirilir. Doğru eksenleri belirli noktalarda kesiyorsa, kesişim biçimi de kullanılabilir. Dikey ve yatay doğrular özel kabul edilir: yatay doğrular y eşittir sabit, dikey doğrular x eşittir sabit biçimindedir. Denklem kurarken asıl beceri, verilen bilginin hangi denklem biçimine daha hızlı dönüşeceğini görmektir.

Doğru denklemi, doğru üzerindeki bütün noktaların ortak kuralını verir. Koordinat düzleminde bir doğruya ait her nokta, denkleme yazıldığında denklemi sağlamalıdır. Bu nedenle doğru denklemi kurarken yalnızca sembol düzenlemek değil, verilen nokta ve eğim bilgisinin gerçekten aynı doğruyu belirleyip belirlemediğini kontrol etmek gerekir. En tanınmış biçim y eşittir mx artı n biçimidir. Burada m doğrunun eğimidir; x katsayısı doğrunun yatay ilerleyişe karşılık ne kadar yükseldiğini ya da alçaldığını gösterir. n ise doğru x sıfırken y 'nin aldığı değerdir, yani y eksenini kesme noktasıdır.

Bir nokta ve eğim verildiğinde denklem kurmanın sağlam yolu, y eksi y_1 eşittir m çarpı x eksi x_1 ilişkisini kullanmaktır. Burada x_1 , y_1 doğru üzerindeki bilinen noktadır. Bu ilişki, doğru üzerindeki herhangi bir noktanın bilinen noktaya göre düşey değişiminin yatay değişime oranının eğime eşit olduğunu söyler. İşlem sonunda denklem çoğu zaman y eşittir mx artı n biçimine getirilir. Pratik düşünmek gerekirse, eğim biliniyorsa önce y eşittir mx artı n yazılır, sonra verilen noktanın x ve y değerleri yerine konularak n bulunur. Bu yöntem özellikle tam sayılı eğimlerde hızlıdır.

İki noktası bilinen doğrunun denkleminde önce eğim hesaplanır. y değerleri farkı x değerleri farkına bölünür ve bulunan eğimle noktalardan biri kullanılır. İki nokta formülü de aynı şeyi doğrudan yapar; fakat eğimi önce bulmak, işlemin mantığını daha görünür kılar. Eğim kesirli çıktığında payda y 'nin katsayısı, pay x 'in katsayısı gibi düşünülebilir; sonra bilinen nokta yerleştirilerek sabit terim tamamlanır. Bu yaklaşım, seçeneklerde denklem farklı düzenlenmiş olsa bile sonucu tanımayı kolaylaştırır. Çünkü doğru denklemleri aynı doğruyu anlatacak biçimde iki tarafı aynı sayı ile çarpılarak ya da terimler yer değiştirilerek yazılabilir.

Eksen kesişimlerine dayanan denklemde, doğru x eksenini a noktasında ve y eksenini b noktasında kesiyorsa x bölü a artı y bölü b eşittir 1 biçimi kullanılır. Orijinden geçen doğrularda sabit terim yoktur; denklem y eşittir mx biçimine iner. Yatay doğrularda y sabit kaldığı için denklem y eşittir k , dikey doğrularda x sabit kaldığı için denklem x eşittir k olur. Bu özel durumları tanımak önemlidir, çünkü dikey doğrunun eğimi tanımsızdır ve y eşittir mx artı n biçimine zorlanamaz. Doğru denklemlerinde başarı, verilen bilgiyi uygun biçime çevirmek ve son denklemde hem eğimi hem de bilinen noktayı denetlemekle gelir.

Seçenekli sorularda denklem çoğu zaman y yalnız bırakılmış halde durmaz. Terimler aynı tarafa toplanmış, denklem eksiyle çarpılmış ya da katsayılar ortak çarpanla büyütülmüş olabilir. Bu nedenle bulunan denklemi seçenekle karşılaştıırken görünüş eğil, eşdeğerliğe bakmak gerekir. Örneğin y eşittir $2x$ eksi 3 biçimi, $2x$ eksi y eksi 3 eşittir 0 biçiminde de aynı doğruyu anlatır. Kontrol için verilen noktayı seçenekte yerine yazmak veya x katsayısından eğimi yeniden okumak hızlı bir güvenlik sağlar. Doğru denklemlerinde işlem kadar bu denklem okuryazarlığı da belirleyicidir.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.4.6 - Simetriler

Analitik Düzlemde Nokta ve Doğru Simetrileri

KISACA

Simetri, analitik düzlemde bir noktanın ya da şeklin belirli bir eksene, doğruya veya merkeze göre yansımalarıdır. Noktanın x eksenine göre simetrisinde x değeri korunur, y değeri işaret değiştirir. y eksenine göre simetride y değeri korunur, x değeri işaret değiştirir. Orijine göre simetride iki koordinat da işaret değiştirir. y eşittir x doğrusuna göre simetride koordinatlar yer değiştirir; y eşittir eksi x doğrusuna göre hem yer değişimi hem işaret değişimi birlikte düşünülür. Simetri sorularında şekli ezberlemekten çok, hangi uzaklığın korunacağını anlamak gerekir. Yansıyan nokta, simetri alınan eksene ya da doğruya eski noktaya aynı uzaklıkta kalır.

Analitik düzlemde simetri, koordinatların düzenli biçimde değişmesiyle anlaşılır. Bir nokta yansıtıldığında noktanın simetri alınan yere uzaklığı korunur; yalnızca düzlemdeki konumu karşı tarafa taşınır. Bu yüzden simetri sorularında önce simetrinin neye göre alındığı belirlenir. x eksen, y eksen, orijin, y eşittir x doğrusu ve y eşittir eksi x doğrusu en temel simetri yerleridir. Her biri koordinatlarda farklı ama tutarlı bir dönüşüm oluşturur.

x eksenine göre simetride nokta yatay eksenin öbür tarafına geçer. Yatay konum değişmediği için x değeri aynı kalır; noktanın eksenin üstünde ya da altında oluşunu anlatan y değeri işaret değiştirir. Bu nedenle a , b noktasının x eksenine göre simetriği a , eksi b biçiminde düşünülür. y eksenine göre simetride bu kez düşey konum korunur; y değeri aynı kalır, x değeri işaret değiştirir. a , b noktası eksi a , b noktasına gider. Orijine göre simetride nokta hem yatay hem düşey yönde karşı tarafa taşındığı için iki koordinat da işaret değiştirir ve sonuç eksi a , eksi b olur.

y eşittir x doğrusuna göre simetri, koordinatların yer değiştirmesiyle görülür. Çünkü bu doğru, birinci ve üçüncü bölgeleri ortadan bölen çizgi gibi davranır; noktanın x uzaklığı y uzaklığına, y uzaklığı x uzaklığına dönüşür. a , b noktası b , a noktasına gider. y eşittir eksi x doğrusuna göre simetride ise yer değiştirme yapılırken işaretler de ters döner; a , b noktası eksi b , eksi a biçiminde yorumlanır. Bu kurallar, sadece tek nokta için değil, doğru parçaları ve çokgenler için de uygulanır. Bir şeklin simetriği istenirse köşe noktaları tek tek dönüştürülür ve yeni noktalar aynı sırayla birleştirilir.

Doğru simetrilerinde de mantık aynıdır. Bir doğru üzerindeki iki noktanın simetriği alınırsa, bu yeni noktaların oluşturduğu doğru eski doğrunun simetriğidir. Eksenlere göre simetri alınırken denklemdeki x ya da y yerine işaret değiştirmiş değer yazmak da kullanılabilir. Örneğin x eksenine göre simetri düşünülüyorsa y 'nin işareti, y eksenine göre simetri düşünülüyorsa x 'in işareti değişir. Fakat işlem ne kadar cebirsel görünürse görünsün, temel kontrol geometriktir: eski ve yeni nokta, simetri eksenine eşit uzaklıkta olmalıdır. Bu kontrol yapılırsa işaret hataları hızlıca yakalanır.

Simetri işlemlerinde sıranın korunması da önemlidir. Bir çokgenin köşeleri dönüştürülürken her köşe aynı simetri kuralına göre taşınmalı ve yeni köşeler eski şeklin sırasıyla birleştirilmelidir; aksi halde doğru noktalar bulunmasına rağmen farklı bir şekil oluşabilir. Denklem simetrisinde ise önce hangi değişkenin

neye dönüşeceği belirlenir, sonra sadeleştirme yapılır. y eşittir x doğrusuna göre simetride x ile y 'nin yer değiştirmesi, bir doğrunun ters ilişki gibi okunmasına yol açabilir. Bu yüzden simetri, sadece işaret değiştirme değil, düzlemde uzaklık koruyan düzenli bir dönüşüm olarak görülmelidir.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.4.7 · Eşitsizlikler

Eşitsizliklerde Aralık, İşaret ve İşlem Kuralları

KISACA

Eşitsizlikler, bir ifadenin tek bir değere eşit olmasından çok hangi aralıkta kalacağını anlatır. Aynı sayı eşitsizliğin her yanına eklenebilir ya da her yanından çıkarılabilir; yön değişmez. Pozitif bir sayıyla çarpma veya bölme de yönü değiştirmez. Negatif bir sayıyla çarpma ya da bölme yapıldığında ise eşitsizlik yön değiştirir. Kesirleri ters çevirirken sınırların aynı işaretli olmasına dikkat edilir ve yön ters döner. Kuvvet alma işlemlerinde tek kuvvetler işareti koruyarak ilerler; çift kuvvetlerde özellikle aralık sıfırı içeriyorsa en küçük değer sıfır olabilir. Bu yüzden eşitsizlik sorularında işlemden önce aralığın işaret yapısını görmek, sonucun sınırlarını doğru kurmanın anahtarıdır.

Eşitsizlik, bir bilinmeyen tek bir sonuç değil, bir değer aralığı içinde yaşadığını anlatır. Denklemlerde amaç bilinmeyeni belirli bir sayıya ulaştırmaktır; eşitsizliklerde ise bilinmeyen hangi sayıların arasında kalacağını buluruz. Bu nedenle işlem yaparken yalnızca cebirsel düzeni değil, eşitsizlik yönünü ve sınırların dahil olup olmadığını da korumak gerekir. Küçük, büyük, küçük eşit ve büyük eşit işaretleri sadece karşılaştırma değil, aralığın açık mı kapalı mı olduğunu da gösterir.

Eşitsizliklerde toplama ve çıkarma denklemlerdeki gibi çalışır. Aynı sayı eşitsizliğin her tarafına eklenebilir ya da her tarafından çıkarılabilir; işaret yönü değişmez. Örneğin ortadaki ifadeyi yalnız bırakmak için her tarafa aynı sabiti eklemek güvenlidir. Pozitif bir sayı ile çarpma ya da pozitif bir sayıya bölme de yönü değiştirmez. Çünkü pozitif çarpan, sayıların büyüklük sırasını korur. Bu yüzden $2x$ aralığı isteniyorsa her tarafı 2 ile çarpmak, x bölü 3 aralığı isteniyorsa her tarafı 3'e bölmek doğrudan yapılabilir.

Negatif sayıyla çarpma veya bölme eşitsizliklerin en dikkat isteyen kuralıdır. Negatif çarpan, sayı doğrusu üzerindeki sıralamayı tersine çevirir; büyük olan sayı daha küçük, küçük olan sayı daha büyük görünüme geçer. Bu nedenle eşitsizlik negatif bir sayıyla çarpıldığında ya da bölündüğünde yön değiştirilir. Bileşik eşitsizliklerde bu işlem yapılırken sağ ve sol sınırların yerleşimi de dikkatle düzenlenmelidir. Bir ifadeyi eksiyle çarparken yalnızca katsayı değişmez; aralığın okunma yönü de tersine döner.

Kesirli ifadelerde ters çevirme yapılacaksa sınırların işareti önemlidir. Aynı işaretli pozitif aralıklarda ya da aynı işaretli negatif aralıklarda ters alma, büyüklük sırasını değiştirir. Fakat aralık sıfırı içeriyorsa ters alma doğrudan uygulanamaz; çünkü sıfırın çarpmaya göre tersi yoktur. Kuvvet alma işleminde de işaret yapısı belirleyicidir. Tek kuvvetlerde aralığın yönü doğal biçimde korunur; negatif sayı negatif, pozitif sayı pozitif kalır. Çift kuvvetlerde ise negatif değerlerin karesi pozitifleştiği için sınırlar yeniden düşünülür. Aralık sıfırı içeriyorsa kareli ifadenin en küçük değeri sıfırdır; sıfır aralıkta yoksa sınırların kareleri karşılaştırılır. Eşitsizlik sorularında güvenli çözüm, önce yapılacak işlemin aralığın yönünü değiştirip değiştirmediğini sormak, sonra sınırları tamsayı ya da reel değer isteğine göre okumaktır.

Aralık sorularında son adım, istenen sayı kümesini doğru okumaktır. Reel sayı isteniyorsa aralık içindeki bütün değerler kabul edilir; tamsayı isteniyorsa sınırların açık ya da kapalı oluşuna göre dahil edilecek tamsayılar tek tek düşünülür. Bir uçta eşitlik varsa o sınır alınabilir, eşitlik yoksa alınamaz. Bir ifade bileşik biçimde isteniyorsa, örneğin $4x$ artı $2y$ gibi, önce $4x$ ve $2y$ için ayrı aralıklar oluşturulup sonra taraf tarafa toplama yapılabilir. Çıkarma gerekiyorsa ikinci aralık eksiyle çarpılarak toplama haline getirilir. Böylece eşitsizlik işlemleri ezber değil, yön ve aralık bilinciyle yönetilen kontrollü adımlar olur.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.5.1 • Prizma

Prizmada Taban, Yükseklik, Hacim ve Yüzey Alanı

KISACA

Prizma, alt ve üst tabanı birbirine eş ve paralel olan katı cisimdir. Taban şekli üçgen, kare, dikdörtgen, beşgen, altıgen ya da daire dışındaki başka bir çokgen olabilir; prizmanın adı çoğunlukla bu taban şekline göre verilir. Yan ayrıtlar tabana dikse dik prizma, dik değilse eğik prizma oluşur. KPSS düzeyindeki işlemlerde dik prizma mantığı özellikle önemlidir. Hacim, taban alanı ile yüksekliğin çarpımıdır. Yanal alan, dik prizmalarda taban çevresi ile yüksekliğin çarpımı olarak bulunur. Tüm yüzey alanı ise yanal alana alt ve üst taban alanlarının eklenmesiyle elde edilir. Prizma sorularında önce tabanın hangi şekil olduğu belirlenir; sonra o tabanın alan ve çevre bilgisi katı cisme taşınır.

Prizma, katı cisimler içinde en temel modeldir; çünkü diğer birçok cisim onun mantığından türetilir. Bir prizmanın alt ve üst tabanları birbirine eş şekillerden oluşur ve bu iki taban paralel konumdadır. Taban üçgen ise üçgen prizma, kareyse kare dik prizma, dikdörtgen ise dikdörtgenler prizması, düzgün altıgen ise altıgen prizma gibi adlandırmalar yapılır. Burada tabanın şekli, cismin hesabında kullanılacak alan ve çevre bilgisini belirler. Bu yüzden prizma sorusuna başlanırken ilk iş, tabanın ne olduğuna karar vermektir.

Prizmalar dik ve eğik olarak ayrılır. Dik prizmada yan ayrıtlar tabana diktir; bu nedenle yükseklik doğrudan yan ayrıt uzunluğu gibi kullanılabilir. Eğik prizmada yan ayrıt tabana dik olmadığı için yükseklik ayrı düşünülür. Temel sınav işlemlerinde dik prizma daha kullanışlıdır; çünkü hacim ve yüzey alanı formülleri açık biçimde uygulanır. Hacim, taban alanı ile yüksekliğin çarpımıdır. Bu ifade bütün dik prizmalarda aynı kalır; değişen tek şey taban alanının nasıl bulunduğuudur. Taban eşkenar üçgen ise eşkenar üçgen alanı, kareyse kare alanı, dikdörtgen ise dikdörtgen alanı kullanılır.

Yüzey alanında iki ayrı parça düşünülür. Yan yüzlerin alanları toplamı yanal alandır. Dik prizmada yan yüzler tabanın kenarları boyunca yükselen dikdörtgenler gibi düşünülebilir. Bu dikdörtgenlerin genişlikleri taban kenarları, yükseklikleri prizmanın yüksekliği olduğundan yanal alan taban çevresi çarpı yükseklik biçiminde bulunur. Tüm alan ise yanal alana iki taban alanının eklenmesiyle elde edilir. Alt ve üst taban eş olduğu için taban alanı ikiyle çarpılır ve yanal alana katılır.

Prizma sorularında formülü yazmak çoğu zaman yeterli değildir; tabanın iç geometrisi de doğru okunmalıdır. Düzgün altıgen taban altı eşkenar üçgene ayrılabilir, üçgen tabanda yükseklik gerekebilir, dikdörtgen tabanda kenarlar orantı ile verilmiş olabilir. Hacim biliniyorsa taban alanı üzerinden yükseklik, yükseklik biliniyorsa hacim ya da alan bulunabilir. Soru yüzey alanını istiyorsa yanal alan ile taban alanlarının karıştırılmaması gerekir. Prizmayı doğru çözmek, iki boyutlu taban bilgisini üçüncü boyuttaki yükseklikle düzenli biçimde birleştirmektir.

Prizma içinde uzunluk soruları geldiğinde, katı cismin yüzlerinde ve içinde oluşan dik üçgenler aranır. Taban köşegeni, yüzey köşegeni ve cisim içinden geçen uzaklıklar çoğu zaman Pisagor ile çözülür. Bu nedenle prizma yalnız alan-hacim formülü değildir; aynı zamanda üçgen bilgisinin üç boyuta taşınmış

halidir. Birleşik prizma sorularında da hacimler toplanabilir ya da çıkarılabilir; fakat tabanlar eş ve yükseklikler aynıysa orantı kurmak daha hızlı olabilir. Sağlam çözüm, taban alanı, taban çevresi, yükseklik ve istenen yüzey parçasını ayrı ayrı adlandırarak ilerlemektir.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.5.2 - Dikdörtgenler Prizması

Dikdörtgenler Prizmasında Hacim, Alan ve Köşegen

KISACA

Dikdörtgenler prizması, bütün yüzleri dikdörtgen olan dik prizmadır. Üç farklı ayrıt uzunluğu a , b ve c ile gösterildiğinde hacim bu üç uzunluğun çarpımıdır. Yüzey alanı, karşılıklı yüzlerin eş olmasından yararlanılarak iki çarpı ab artı ac artı bc toplamı biçiminde düşünülür. Yanal alan isteniyorsa taban çevresi yükseklikle çarpılır. Bu prizmanın en ayırt edici noktalarından biri köşegen bilgisidir. Yüzey köşegeni, bir yüz üzerindeki dikdörtgenin köşegenidir ve o yüzün iki kenarıyla Pisagor uygulanarak bulunur. Cisim köşegeni ise birbirine en uzak iki köşeyi içeriden birleştirir; üç ayrıtın kareleri toplamının karekökü olarak hesaplanır. Sorularda orantılı ayrıtlar, hacim ve köşegen birlikte verilebilir.

Dikdörtgenler prizması, dik prizma mantığının en net görüldüğü katı cisimlerden biridir. Alt ve üst tabanı dikdörtgendir, yan yüzleri de dikdörtgen biçimindedir. Bir köşeden çıkan üç ayrıt uzunluğu a , b ve c olarak düşünüldüğünde bu üç uzunluk cismin bütün ölçülerini belirler. Karşılıklı yüzler birbirine eştir; örneğin a ile b kenarlarından oluşan iki yüz, a ile c kenarlarından oluşan iki yüz ve b ile c kenarlarından oluşan iki yüz vardır. Bu eşlik, alan hesabını kısa ve düzenli hale getirir.

Hacim, taban alanı ile yüksekliğin çarpımıdır. Taban kenarları a ve b , yükseklik c ise hacim a çarpı b çarpı c olur. Hangi ayrıtın yükseklik kabul edildiği çizime bağlı olarak değişebilir; fakat dikdörtgenler prizmasında üç ayrıtın çarpımı aynı sonucu verir. Yüzey alanında her yüz çift olarak geldiği için tüm alan iki çarpı ab artı ac artı bc toplamıdır. Eğer yalnız yanal alan istenirse tabanın çevresi yükseklikle çarpılır. Bu durumda taban olarak hangi dikdörtgen seçildiyse onun çevresi alınmalı, seçilen yüksekliğin o tabana dik ayrıt olduğu unutulmamalıdır.

Dikdörtgenler prizmasında köşegenler iki ayrı türde ele alınır. Yüzey köşegeni, cismin bir yüzü üzerinde kalan dikdörtgen köşegenidir. Örneğin a ve b kenarlı bir yüzün köşegeni, a kare artı b karenin kareköküdür. a ve c kenarlı ya da b ve c kenarlı yüzlerde de aynı Pisagor mantığı uygulanır. Cisim köşegeni ise yüzeyde kalmaz; prizmanın içinden geçerek birbirine en uzak iki köşeyi birleştirir. Bu köşegenin uzunluğu a kare artı b kare artı c karenin kareköküdür. Çünkü önce taban köşegeni, sonra bu köşegenle yükseklik arasında ikinci bir dik üçgen düşünülür.

Sorularda ayrıtlar çoğu zaman doğrudan verilmez; iki, üç ve dört ile orantılı gibi ifadelerle gelir. Böyle durumlarda ayrıtlar $2k$, $3k$, $4k$ biçiminde yazılır ve hacim ya da yüzey alanı bilgisi kullanılarak k bulunur. k belirlendiğinde gerçek ayrıt uzunlukları ortaya çıkar. Bundan sonra cisim köşegeni, yüzey köşegeni, alan ya da hacim hesabı yapılabilir. Bu konunun özü, dikdörtgenler prizmasının üç boyutlu görünümünü üç tane birbirine dik ayrıt üzerinden okumaktır. Her hesap, bu üç ayrıtın doğru seçilmesine ve Pisagor bağlantısının uygun yerde kurulmasına bağlıdır.

Açınım sorularında dikdörtgenler prizmasının altı yüzü düzlemde açılmış halde verilebilir. Bu durumda karşılıklı yüzlerin eşliği, hangi kenarın hangi kenarla birleşeceğini anlamayı sağlar. Boyama, kaplama, kutu yapma ya da tel uzunluğu gibi yorumlarda istenen şey tüm yüzey alanı olmayabilir; yalnız belirli

yüzlerin alanı veya yalnız ayrıtların toplamı istenebilir. Ayrıtlar toplamında aynı uzunluktan dörder tane bulunduğu için toplam $4a$ artı $4b$ artı $4c$ biçiminde düşünülür. Böyle ayrıtlar, konuyu yalnız hacim hesabından çıkarıp cismi gerçekten okuma becerisine dönüştürür.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.5.3 · Küp

Küpte Eş Ayritlar, Alan, Hacim ve Köşegenler

KISACA

Küp, bütün ayritları eşit olan özel bir dikdörtgenler prizmasıdır. Altı yüzünün her biri eş karelerden oluşur. Bir ayrit uzunluğu a ise hacim a^3 küp, tüm yüzey alanı $6a^2$ a kare, yanal alan dört a^2 a kare olarak düşünülür. Küpte yüzey köşegeni ile cisim köşegeni karıştırılmamalıdır. Yüzey köşegeni bir kare yüzün köşegenidir ve $a\sqrt{2}$ kök iki olur. Cisim köşegeni ise küpün içinden geçerek birbirine en uzak iki köşeyi birleştirir ve $a\sqrt{3}$ kök üç olarak bulunur. Küp soruları çoğu zaman hacimden ayrit buldurur, sonra alan ya da köşegen ister. Bu nedenle ilk adım, verilen bilgiyi ayrit uzunluğuna çevirmek ve hangi köşegenin sorulduğunu ayırmaktır.

Küp, dikdörtgenler prizmasının bütün ayritları eşit olan özel halidir. Bu özellik, küpü hem sade hem de dikkat isteyen bir katı cisim yapar. Sadelik şuradan gelir: tek bir ayrit uzunluğu bilindiğinde hacim, yüzey alanı, yanal alan, yüzey köşegeni ve cisim köşegeni bulunabilir. Dikkat isteyen taraf ise, küpte her şey eş görüldüğü için yüzey köşegeni ile cisim köşegeninin kolayca karıştırılmasıdır. Soruda geçen köşegenin bir yüz üzerinde mi kaldığı, yoksa cismin içinden mi geçtiği mutlaka ayırt edilmelidir.

Bir ayrit uzunluğu a olan küpte her yüz a^2 a kenarlı bir karedir. Hacim, taban alanı ile yüksekliğin çarpımıdır; taban alanı a^2 a kare, yükseklik yine a olduğu için hacim a^3 küp olur. Tüm yüzey alanı altı eş kare yüzün alanları toplamıdır; her yüz a^2 a kare olduğundan tüm alan $6a^2$ a kareye eşittir. Yanal alan ise alt ve üst taban dışındaki dört yan yüzün toplamıdır ve dört a^2 a kare olarak düşünülür. Bu değerler ezber gibi görünse de aslında dikdörtgenler prizmasının a, a, a halinden doğar.

Yüzey köşegeni, küpün herhangi bir kare yüzünde çizilen köşegendir. Karenin iki dik kenarı a ve a olduğundan Pisagor sonucu $a\sqrt{2}$ kök iki çıkar. Cisim köşegeni ise küpün içinden geçer ve birbirine en uzak iki köşeyi birleştirir. Dikdörtgenler prizmasındaki genel cisim köşegeni formülünde a^2 a kare artı a^2 a kare artı a^2 a kare toplandığında sonuç $a^2(2+1)$ kök üç olur. Bu iki uzunluk arasındaki fark, sorunun yönünü belirler. Yüzey köşegeni istenmişse yalnız bir kare yüz düşünülür; cisim köşegeni istenmişse üç boyutun tamamı hesaba katılır.

Küp sorularında verilen bilgi çoğu zaman doğrudan ayrit değildir. Hacim 27 ise $a^3=27$ denilerek ayrit 3 bulunur. Tüm alan verildiyse altı a^2 a kare üzerinden, yanal alan verildiyse dört a^2 a kare üzerinden ayrit hesaplanır. Bir köşe ile bir kenarın orta noktası gibi daha karmaşık bir uzunluk istenirse, küpün içinde veya yüzünde uygun dik üçgen aranır. Böyle sorularda küp bilgisi tek başına yetmez; dik üçgen ve Pisagor alışkanlığı da gerekir. Küpün güçlü yanı, bütün ayritların eşit olması sayesinde karmaşık görünen uzunlukları düzenli üçgenlere indirgeyebilmesidir.

Küpün açılımı da sık kullanılan bir yorum alanıdır. Altı eş kare düzlemde farklı biçimlerde açılabilir; fakat her geçerli açınımında kareler katlandığında karşılıklı yüzler çakışmadan küpü oluşturmalıdır. Boyama sorularında kaç yüzün boyandığı, kesme sorularında küçük küplerin hangi yüzlerinin dışarıda kaldığı bu

eş kare yapısına dayanır. Tel uzunluğu istenirse küpte on iki ayrıt bulunduğu için toplam uzunluk on iki a olur. Böylece küp, az sayıda formülle çok farklı soru diline açılır; ana ölçü hep aynı ayrıt uzunluğudur.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.5.4 - Silindir

Silindirde Daire Taban, Hacim ve Açınım

KISACA

Silindir, tabanı daire olan prizma gibi düşünülebilir. Alt ve üst taban iki eş dairedir; yan yüzey açıldığında bir dikdörtgen elde edilir. Taban yarıçapı r , yükseklik h ise hacim taban alanı πr^2 ile yükseklikten $\pi r^2 h$ olur. Yan yüzeyin açınımindaki dikdörtgenin bir kenarı yükseklik, diğer kenarı taban çevresi olan $2\pi r$ değeridir. Bu nedenle yanal alan $2\pi r h$, tüm alan ise yanal alana iki taban alanı eklenerek $2\pi r^2 + 2\pi r h$ artı πr^2 kare biçiminde bulunur. Silindir sorularında yarıçap, π , yükseklik, hacim ve alan bilgileri birbirine dönüştürülür; en sık hata πr yarıçap gibi kullanmaktır.

Silindir, katı cisimler içinde prizma mantığını daire tabana taşıyan şekildir. Alt ve üst tabanı birbirine eş iki dairedir ve bu tabanlar paralel konumdadır. Dik silindirde taban merkezlerini birleştiren doğrultu tabanlara diktir; bu uzunluk yükseklik olarak kullanılır. Taban yarıçapı r , yükseklik h ile gösterildiğinde bütün temel hesaplar dairenin alanı ve çevresi üzerine kurulur. Bu yüzden silindir sorularında önce verilen uzunluğun yarıçap mı π çap mı olduğu netleştirilmelidir. Çap verilmişse yarıçap onun yarısıdır; bu ayırım hacimde r kare bulunduğu için sonucu ciddi biçimde değiştirir.

Silindirin hacmi, prizmalardaki genel hacim mantığıyla aynıdır: taban alanı yükseklikle çarpılır. Taban daire olduğundan taban alanı πr^2 karedir; yükseklik h ile çarpılınca hacim $\pi r^2 h$ olur. Hacim verilip yükseklik istenirse bu kez formül tersinden kullanılır. Örneğin π ortak çarpanı iki tarafta sadeleşebilir, r kare hesaplanır ve kalan katsayıdan h bulunur. Burada birimlerin de uyumlu okunması gerekir; hacim birim küp, alan birim kare, uzunluk ise birim olarak yorumlanır.

Yüzey alanı için silindirin açınımını düşünmek çok yararlıdır. Silindir açıldığında iki eş daire ve bir dikdörtgen oluşur. Bu dikdörtgenin yüksekliği silindirin yüksekliğidir; diğer kenarı ise taban dairesinin çevresidir. Taban çevresi $2\pi r$ olduğundan yan yüzey alanı $2\pi r h$, yani $2\pi r h$ olur. Tüm yüzey alanı bulunurken bu yanal alana alt ve üst taban alanları eklenir. İki taban bulunduğu için toplam $2\pi r^2 + 2\pi r h$ kare eklenir. Böylece tüm alan $2\pi r^2 + 2\pi r h$ artı πr^2 kare biçiminde düşünülür.

Silindir sorularında yalnız formül yazmak yerine açınımı zihinde canlandırmak işlemi sağlamlaştırır. Yanal alan isteniyorsa daire tabanların alanı eklenmez; tüm alan isteniyorsa mutlaka iki taban alanı katılır. Bir soruda etiket, kaplama, yan yüzey ya da açık yüzey gibi ifadeler varsa hangi yüzeylerin dahil edildiği dikkatle okunmalıdır. Ayrıca silindirin içinde ya da dışında bir doğru parçası verildiğinde, yükseklik ve çap çoğu zaman dik üçgen kurmak için kullanılır. Silindir, daire bilgisini katı cisim mantığıyla birleştirdiği için dairenin alanı ve çevresi güçlü değilse konu zorlaşır; temel çözüm anahtarı bu iki daire bilgisini doğru yerde kullanmaktır.

Silindirle ilgili oran sorularında yarıçap ve yükseklik değişiminin hacme ve alana etkisi ayrıca izlenmelidir. Yarıçap iki katına çıkarsa taban alanı dört katına çıkar; yükseklik iki katına çıkarsa hacim iki katına çıkar. Yanal alanda ise yarıçap ve yükseklik birinci dereceden çarpanlardır. Bu nedenle aynı hacme sahip farklı silindirler farklı yüzey alanlarına sahip olabilir. Açık kap, kapalı kutu, boru veya rulo

gibi günlük dilde verilen yorumlarda hangi tabanların var olduğu ve iç-dış yüzeylerin hesaba katılıp katılmadığı özellikle belirlenmelidir.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.5.5 - Dönel Silindir

Dönel Silindirde Oluşum Mantığı ve Ölçü İlişkileri

KISACA

Dönel silindir, bir dikdörtgenin bir kenarı etrafında döndürülmesiyle oluşan silindir olarak düşünülebilir. Döndürme eksenini yükseklik doğrultusunu, eksene uzak kalan kenar ise yarıçapı belirler. Bu yüzden dönel silindir sorularında şeklin hangi kenar etrafında döndürüldüğü çok önemlidir. Yanlış kenarı yükseklik ya da yarıçap almak, hacim ve alan sonucunu değiştirir. Temel formüller dik silindirle aynıdır: hacim $\pi r^2 h$, yanal alan $2\pi r h$, tüm alan ise iki taban alanı eklenerek bulunur. Dönel yorumun katkısı, r ve h değerlerini doğrudan verilmeyen bir düzlemsel şekilden çıkarmaktır. Özellikle dikdörtgenin açınım ve dönme ilişkisi birlikte okunmalıdır.

Dönel silindir, silindiri oluşturan hareketi anlamaya yarayan bir bakış açısidir. Bir dikdörtgen kendi kenarlarından biri etrafında tam tur döndürülürse, eksen olan kenar silindirin yüksekliği gibi davranır; eksene dik uzaklık ise taban yarıçapını verir. Bu nedenle dönel silindir sorularında ilk soru şu olmalıdır: hangi kenar dönme eksenini yapmış? Aynı dikdörtgen farklı kenarı etrafında döndürülürse oluşan silindirin yarıçapı ve yüksekliği yer değiştirebilir; hacim ve alan da buna göre değişir.

Dönel silindirde kullanılan hacim ve alan formülleri dik silindirle aynıdır. Taban yine dairedir, taban alanı πr^2 olur ve yükseklikle çarpıldığında hacim $\pi r^2 h$ elde edilir. Yanal alan, silindirin yan yüzeyinin açıldığında bir dikdörtgen vermesine dayanır. Bu dikdörtgenin bir kenarı yükseklik h , diğer kenarı taban çevresi $2\pi r$ olduğundan yanal alan $2\pi r h$ olur. Tüm yüzey alanı istenirse iki eş daire taban da eklenir ve $2\pi r h + 2\pi r^2$ olarak düşünülür.

Dönel silindir sorularında doğrudan r ve h verilmek yerine bir dikdörtgen, kare ya da katlama-döndürme durumu anlatılabilir. Eğer dikdörtgenin uzun kenarı etrafında döndürme yapılıyorsa uzun kenar yükseklik olur, kısa kenar yarıçap olur. Kısa kenar etrafında döndürülürse bu kez kısa kenar yükseklik, uzun kenar yarıçap gibi çalışır. Alan ve hacimde yarıçapın karesi bulunduğu için bu yer değişimi sadece küçük bir ayrıntı değildir; sonucu büyüklük olarak da değiştirir. Bu yüzden işlemde önce eksen ve eksene uzaklık açıkça belirlenmelidir.

Açınım düşüncesi dönel silindiri kontrol etmekte de işe yarar. Yan yüzey açıldığında oluşan dikdörtgenin yüksekliği dönme eksenini uzunluğuyla, genişliği ise dairesel tabanın çevresiyle ilişkilidir. Eğer soruda yan yüzeyin açınımı verilmişse, dikdörtgenin taban çevresine karşılık gelen kenarı $2\pi r$ olarak okunur. Böylece r bulunur; diğer kenar h olarak alınır. Dönel silindirin özü, düzlemdeki dikdörtgen bilgisini üç boyutlu daire tabanlı cisme çevirmektir. Doğru çözüm, formülden önce oluşumu doğru anlamaya bağlıdır.

Bu konu, özellikle döndürme eksenini şeklin içinde mi kenarında mı sorusuyla da derinleşir. Dikdörtgen bir kenarı etrafında dönerse boşluksuz bir silindir oluşur; fakat şeklin dışında paralel bir doğru etrafında döndürülmesi gibi daha ileri yorumlarda içi boş yapılar ortaya çıkabilir. Temel KPSS düzeyinde beklenen beceri, verilen düzlemsel uzunluklardan yarıçapı ve yüksekliği seçmektir. Eksen üzerinde

kalan uzunluk dönme sırasında çember çizmez; eksene uzak olan noktalar çember oluşturur. Bu ayrımı görmek, dönel silindirin bütün alan ve hacim işlemlerini güvenli hale getirir.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.5.6 · Piramit

Piramitlerde Taban, Tepe Noktası, Hacim ve Alan Mantığı

KISACA

Piramit, bir çokgen tabanın bütün köşelerinin taban dışında bir tepe noktasıyla birleştirilmesiyle oluşan katı cisimdir. Taban üçgen, kare, beşgen ya da başka bir çokgen olabilir; yan yüzler üçgensel bölgelerden oluşur. Piramidin yüksekliği, tepe noktasından taban düzlemine indirilen dik uzaklıktır. Hacim, aynı taban ve yüksekliğe sahip prizmanın üçte biri olarak düşünülür; yani taban alanı çarpı yükseklik bölü üçtür. Yanal alan için yan yüz üçgenlerinin alanları toplanır. Tüm alan, yanal alana taban alanının eklenmesiyle bulunur. Piramit sorularında tepe yüksekliği, yan ayrıt ve yan yüz yüksekliği birbirinden ayrılmalıdır; çoğu hata bu üç uzunluğu aynı sanmaktan doğar.

Piramit, katı cisimlerde taban ile tepe noktasını birleştiren üçgensel yüzlerden oluşur. Tabanı bir çokgendir; bu taban kare, üçgen, dikdörtgen, düzgün beşgen ya da başka bir çokgen olabilir. Tabaanın her köşesi taban düzlemi dışında yer alan bir tepe noktasıyla birleşir ve yan yüzler üçgen biçiminde ortaya çıkar. Bu yapı, piramidi prizmalardan ayırır. Prizmada alt ve üst taban eş ve paraleldir; piramitte ise tek taban ve bu tabana bağlı bir tepe vardır.

Piramidin yüksekliği, tepe noktasından taban düzlemine indirilen dik uzaklıktır. Bu uzunluk yan ayrıtla karıştırılmamalıdır. Yan ayrıt, tepe noktasından tabandaki bir köşeye giden kenardır; yan yüz yüksekliği ise bir yan üçgenin içindeki yüksekliktir. Özellikle kare tabanlı ya da düzgün tabanlı piramitlerde bu üç uzunluk farklı dik üçgenlerin parçası olabilir. Hangi uzunluğun sorulduğunu anlamak için çizimde tepe, taban merkezi, taban kenarı orta noktası ve taban köşesi ayrı ayrı düşünülmelidir.

Piramidin hacmi, taban alanı çarpı yükseklik bölü üçtür. Bu formül, aynı taban alanına ve aynı yüksekliğe sahip prizmanın hacminin üçte biri olarak yorumlanabilir. Taban kareyse kare alanı, üçgensel üçgen alanı, düzgün çokgensel o tabana ait alan bilgisi kullanılır. Yükseklik mutlaka tabana dik uzaklık olmalıdır; yan ayrıt doğrudan yükseklik gibi alınırsa sonuç yanlış olur. Hacim verilip yükseklik istenirse formül tersinden kullanılır ve taban alanı dikkatle hesaplanır.

Alan hesabında yanal alan ve taban alanı ayrılır. Yanal alan, bütün yan üçgenlerin alanları toplamıdır. Eğer piramit düzgünse yan yüzler eş olabilir ve bir yan yüz alanı yüz sayısı ile çarpılabilir. Düzgün olmayan bir piramitte yan yüzler tek tek hesaplanmalıdır. Tüm alan, yanal alana taban alanının eklenmesiyle bulunur. Piramit sorularının güçlü yanı, katı cisim üçgenlere parçalayarak çözülmesidir. Bu yüzden piramit çalışırken yalnız hacim formülünü değil, tabandaki çokgen bilgisini ve yan yüzlerdeki dik üçgenleri birlikte okumak gerekir.

Piramitlerde oran ve benzerlik de sıkça işe yarar. Tepe noktasına paralel bir kesit alındığında oluşan küçük taban, büyük tabana benzer olur; uzunluk oranı alan oranını ve hacim oranını belirler. Bu fikir kesik piramidin de temelidir. Ayrıca taban düzgün değilse tepe noktasının izdüşümünün tabanda nereye

düştüğü özel olarak verilmelidir; aksi halde bütün yan ayrıtların eş olduğu varsayılmaz. Sağlam çözüm, verilen cismin düzgün mü genel mi olduğunu ayırmak, sonra yüksekliği gerçekten tabana dik olan uzunluk olarak seçmektir.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.5.7 · Düzgün Piramit

Düzgün Piramitte Merkez, Eş Yan Ayrıtlar ve Yan Yüzler

KISACA

Düzgün piramit, tabanı düzgün çokgen olan ve tepe noktası taban merkezinin dik doğrultusunda bulunan piramittir. Bu durumda yan ayrıtlar birbirine eşit olur ve yan yüzler eş ikizkenar üçgenler gibi çalışır. Tepe noktasından tabana indirilen yükseklik taban merkezine düşer. Taban merkezi, düzgün çokgende köşelere ve kenarlara göre düzenli uzaklıklar verdiği için sorular genellikle dik üçgen kurmaya döner. Hacim yine taban alanı çarpı yükseklik bölü üçtür. Yanal alan ise bir yan yüz alanının yan yüz sayısı ile çarpılmasıyla bulunabilir. Düzgün piramitte önemli ayırım, ana yükseklik, yan yüz yüksekliği ve yan ayrıtların farklı üçgenlerde yer almasıdır.

Düzgün piramit, piramit konusunun en düzenli halidir. Tabanı düzgün çokgendir; yani taban kenarları ve taban açıları eşit davranır. Tepe noktası da taban merkezinin tam üzerinde yer alır. Bu nedenle tepe noktasından tabana indirilen dikme taban merkezine düşer. Bu özellik, yan ayrıtların birbirine eşit olmasını ve yan yüzlerin eş üçgenler gibi hesaplanmasını sağlar. Taban kareyse düzgün kare piramit, taban düzgün altıgense düzgün altıgen piramit gibi adlandırmalar yapılabilir.

Düzgün piramitte üç farklı uzunluk özellikle ayrılmalıdır. Birincisi piramidin yüksekliğidir; tepe noktasından taban düzlemine indirilen dik uzaklıktır. İkincisi yan ayrıttır; tepe noktasından tabanın bir köşesine giden kenardır. Üçüncüsü yan yüz yüksekliğidir; tepe noktasından bir taban kenarının orta noktasına indirilen ve yan üçgenin alanında kullanılan uzunluktur. Bu üç uzunluk aynı çizgi değildir. Kare tabanlı bir düzgün piramitte yükseklik, taban merkezine iner; yan ayrıt köşeye gider; yan yüz yüksekliği kenarın orta noktasına ulaşır. Böylece iki farklı dik üçgen oluşur.

Hacim hesabında genel piramit formülü değişmez: taban alanı çarpı yükseklik bölü üç. Düzgünlüğün katkısı, taban alanını ve yüksekliği bulmayı kolaylaştırmasıdır. Taban merkezinden köşeye giden uzaklık, taban merkezinden kenarın orta noktasına giden uzaklık ve taban kenarı arasında düzgün çokgen bilgisi kullanılır. Örneğin kare tabanda merkezden köşeye giden uzaklık köşegenin yarısıdır; merkezden kenara inen dik uzaklık ise kenarın orta noktasına ulaşır. Bu bilgiler tepeyle birleştiğinde Pisagor kullanılabilecek dik üçgenler verir.

Yanal alanda düzgün piramidin düzeni daha da belirgindir. Yan yüzler eş olduğundan bir yan üçgenin alanı bulunup yan yüz sayısı ile çarpılabilir. Bir yan üçgenin tabanı, taban çokgeninin bir kenarıdır; yüksekliği ise yan yüz yüksekliğidir. Tüm alan istenirse bu yanal alana taban alanı eklenir. Düzgün piramit sorularını çözenin ana yolu, şekli tek bir formüle sıkıştırmak değil, merkez, köşe ve kenar orta noktasını doğru seçmektir. Bu noktalar yerleştiğinde hacim, yanal alan ve ayrıt soruları çoğu kez dik üçgenlere indirgenir.

Düzgün piramitte simetri sayesinde kontrol yapmak kolaydır. Tepe noktasından taban köşelerine çizilen yan ayrıtlar eşit olmalı, yan yüzler aynı alanı vermelidir. Eğer bir hesap bir yan yüz için başka, diğer yan yüz için başka sonuç veriyorsa taban düzgün alınmamış ya da yanlış uzunluk kullanılmış olabilir.

Kare tabanlı düzgün piramitte taban merkezinden köşeye giden uzunluk ile taban merkezinden kenar orta noktasına giden uzunluk karıştırılmamalıdır; biri yan ayrıtla, diğeri yan yüz yüksekliğiyle dik üçgen kurar. Bu ayrım, düzgün piramit sorularının kilididir.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.5.8 · Kesik Piramit

Kesik Piramitte Benzerlik, Hacim Farkı ve Yüzey Alanı

KISACA

Kesik piramit, bir piramidin tabanına paralel bir düzlemle kesilmesi ve tepe tarafındaki küçük piramidin ayrılmasıyla oluşur. Alt ve üst tabanlar birbirine benzer çokgenlerdir; bu yüzden uzunluk, alan ve hacim ilişkilerinde benzerlik kullanılır. Hacim hesabı genellikle büyük piramidin hacminden tepede kalan küçük piramidin hacmini çıkarmaya dayanır. Taban alanı ve yükseklikler biliniyorsa kesilen parçaların oranı kurulabilir. Yanal yüzler artık üçgen değil, çoğu durumda yamuk biçimindedir; yanal alan hesaplanırken bu yüzlerin alanları düşünülür. Kesik piramit sorularında en önemli nokta, görünen cismin aslında tamamlanmış bir piramidin parçası olduğunu fark etmek ve eksik tepeyi zihinde geri kurmaktır.

Kesik piramit, bir piramidin tepesine yakın ya da tabana paralel bir düzlemle kesilmesi sonucu oluşan katı cisimdir. Kesme düzlemi tabana paralel olduğunda alt taban ile üst taban birbirine benzer çokgenler olur. Bu benzerlik, kesik piramit sorularının ana fikridir. Görünen cisim tek başına karmaşık gibi dursa da, onu tamamlanmış büyük bir piramitten tepedeki küçük piramidin çıkarılmış hali olarak düşünmek işlemi sadeleştirir. Böylece uzunluklar, alanlar ve hacimler benzerlik oranıyla ilişkilendirilebilir.

Kesik piramitte hacim hesabının en anlaşılır yolu fark yöntemidir. Önce büyük piramidin hacmi düşünülür, sonra kesilip çıkarılan küçük piramidin hacmi bulunur ve büyük hacimden çıkarılır. Piramit hacmi taban alanı çarpı yükseklik bölü üç olduğundan, bu iki piramidin taban alanları ve yükseklikleri doğru belirlenmelidir. Alt ve üst tabanlar benzer olduğu için kenar uzunlukları arasındaki oran yüksekliklere de yansır. Alan oranı uzunluk oranının karesi, hacim oranı ise uzunluk oranının küpü ile ilişkilidir. Bu oran bilgisi, eksik yüksekliği bulmada çok işe yarar.

Yüzey alanında kesik piramidin yan yüzleri artık tam üçgen değildir. Tabanı kare olan bir kesik piramitte yan yüzler ikizkenar yamuklar gibi görülebilir; düzgün tabanlı kesik piramitlerde bu yan yüzler çoğu zaman eş olur. Yanal alan istenirse yan yüzlerin alanları toplanır. Eğer yan yüzler eşse bir yan yüz alanı bulunup yan yüz sayısıyla çarpılabilir. Tüm alan istenirse yanal alana alt taban ve üst taban alanları birlikte eklenir. Burada üst tabanı unutmak yaygın bir hatadır; çünkü kesik piramit tek tabanlı bir piramit gibi değil, iki tabanlı kesilmiş bir cisim gibi ele alınmalıdır.

Kesik piramit sorularında çizimi tamamlamak neredeyse her zaman faydalıdır. Üst tabandan tepeye doğru yan ayrıtlar uzatıldığında küçük piramit, altta ise büyük piramit ortaya çıkar. Bu tamamlanmış şekil, hangi üçgenlerin benzer olduğunu ve yüksekliklerin nasıl paylaşıldığını gösterir. Soruda doğrudan hacim formülü istenmese bile bu benzerlik düşüncesi uzunluk ve alan sorularını çözebilir. Kesik piramitte başarı, görünen yamuk yüzeylerin arkasında gizlenen büyük-küçük piramit ilişkisini yakalamaktır.

Alt ve üst taban çevreleri üzerinden yanal alan kurulacaksa yan yüz yüksekliği ayrıca bilinmelidir. Düzgün kesik piramitte yanal alan, alt ve üst taban çevreleri toplamının yarısı ile yan yüz yüksekliğinin çarpımı şeklinde yorumlanabilir; bu, yan yüz yamuklarının alanlarının toplamından gelir. Fakat düzgünlük verilmemişse bu kısa yol güvenli değildir. Benzerlik oranı ile alan oranı karıştırılmamalıdır: kenarlar 2'ye 3 oranındaysa alanlar 4'e 9 oranındadır. Kesik piramitte en sağlam yaklaşım, önce tamamlanmış büyük piramidi görmek, sonra hangi parçanın sorulduğunu açıkça ayırmaktır.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.5.9 - Koni

Konide Taban Yarıçapı, Yükseklik, Ana Doğru ve Hacim

KISACA

Koni, daire tabanın bütün noktalarının taban dışında bir tepe noktasına bağlanmasıyla oluşan katı cisimdir. Dik konide tepe noktası taban merkezinin dik doğrultusundadır. Taban yarıçapı r , yükseklik h ve ana doğru l koninin temel uzunluklarıdır. Yükseklik taban merkezine iner, ana doğru tepe noktasından taban çemberi üzerindeki bir noktaya gider. Bu iki uzunluk, yarıçapla birlikte dik üçgen oluşturur. Hacim $\pi r^2 h$ bölü 3'tür. Yanal alan $\pi r l$, tüm alan ise yanal alana taban alanı eklenerek $\pi r l$ artı πr^2 kare biçiminde bulunur. Koni sorularında yükseklik ile ana doğruyu karıştırmamak belirleyicidir.

Koni, daire tabanlı bir piramit gibi düşünülebilir. Tabanı dairedir ve bu tabanın çevresindeki noktalar taban düzlemi dışında bulunan bir tepe noktasına bağlanır. Dik konide tepe noktası taban merkezinin tam üzerindedir; bu nedenle tepe noktasından taban merkezine indirilen dikme koninin yüksekliğini verir. Taban yarıçapı r , yükseklik h ve ana doğru l koninin temel üç uzunluğudur. Ana doğru, tepe noktasından taban çemberi üzerindeki bir noktaya giden eğik kenardır. Yükseklikle aynı şey değildir.

Koninin hacmi, piramit mantığına paralel biçimde taban alanı çarpı yükseklik bölü 3'tür. Taban daire olduğundan taban alanı πr^2 kare olur; bu değer h ile çarpılıp üçe bölünür. Hacim verildiğinde yarıçap ya da yükseklik istenebilir. Böyle durumlarda $\pi r^2 h$ bölü 3 ilişkisi tersinden kullanılır. Yarıçapın kareli oluşu nedeniyle çap verilmişse önce yarıçap bulunmalı, sonra formüle geçilmelidir. Aksi halde sonuç dört katına çıkabilir ya da dörtte bire düşebilir.

Alan hesabında koninin yan yüzeyi açıldığında bir daire dilimi gibi düşünülür. Bu yan yüzeyin alanı $\pi r l$ olarak kullanılır; burada l ana doğru uzunluğudur. Tüm alan istenirse taban dairesinin alanı da eklenir ve $\pi r l$ artı πr^2 kare elde edilir. Koni kapalı mı açık mı, yalnız yanal yüzey mi yoksa tabanla birlikte tüm yüzey mi isteniyor, soru metninden dikkatle anlaşılmalıdır. Ana doğru verilmemişse çoğu zaman yarıçap ve yükseklikle Pisagor yapılır; çünkü dik konide taban merkezi, taban çemberindeki nokta ve tepe noktası bir dik üçgen oluşturur.

Koni sorularında zihinsel çizim çok önemlidir. Tepe noktasından taban merkezine inen yükseklik dik, merkezden taban çemberine giden yarıçap yatay, tepe noktasından çember üzerindeki noktaya giden ana doğru eğiktir. Bu üçü birlikte $h^2 + r^2 = l^2$ kare eşittir l kare ilişkisini verir. Eğer kesik koni ya da tamamlanmış koni mantığı kullanılıyorsa benzerlik de devreye girer. Fakat temel konide esas beceri, hacimde h 'yi, yanal alanda l 'yi kullanmak ve bu iki uzunluğu birbirinin yerine koymamaktır.

Koninin açınımı, yanal alanın neden ana doğruya bağlı olduğunu gösterir. Yan yüzey açıldığında merkez açısı olan bir daire dilimi oluşur; bu dilimin yarıçapı koninin ana doğrusudur, yay uzunluğu ise taban çevresine eşittir. Bu ilişki ayrıntılı açınım sorularında merkez açı bulmaya kadar gidebilir. Ayrıca koni bir dik üçgenin bir dik kenarı etrafında döndürülmesiyle de oluşabilir; döndürme eksenini yükseklik, diğer

dik kenar yarıçap, hipotenüs ana doğru olur. Böylece koni, hem katı cisim hem de dönel geometri mantığını birleştirir.

3. GEOMETRİ

İçindekiler

3.5.10 · Küre

Kürede Yarıçap, Alan, Hacim ve Kesit Daireleri

KISACA

Küre, merkezden eşit uzaklıktaki noktaların oluşturduğu üç boyutlu cisimdir. Kürede temel uzunluk yarıçaptır; yüzey alanı dört πr^2 kare, hacim dört πr^3 küp bölü üç olarak kullanılır. Küre, prizma ve piramitlerden farklı olarak taban-yükseklik mantığıyla değil, yarıçap üzerinden hesaplanır. Bu nedenle küre sorularında önce yarıçapın doğrudan mı, çap üzerinden mi, yoksa hacim veya alan bilgisinden mi bulunacağı belirlenir. Küre bir düzlemle kesildiğinde kesit dairedir; kesit dairesinin yarıçapı her zaman kürenin yarıçapı olmak zorunda değildir. Merkezden kesit düzlemine olan uzaklık verilirse, küre yarıçapı ile kesit yarıçapı arasında dik üçgen kurulur. Bu ayrım özellikle alan sorularında önemlidir.

Küre, katı cisimler içinde diğerlerinden farklı bir düşünme düzeni ister. Prizma, silindir, piramit ve konide çoğu işlem taban alanı ve yükseklik üzerinden yürürken kürede ana belirleyici yarıçaptır. Bir merkezden eşit uzaklıktaki noktaların oluşturduğu üç boyutlu yüzey küreyi verir ve bu eş uzaklık yarıçap olarak adlandırılır. Bu nedenle küre sorularında ilk hedef r değerini bulmaktır. Çap verilmişse yarıçap onun yarısıdır; hacim ya da alan verilmişse formüller tersinden kullanılarak yarıçap elde edilir.

Kürenin yüzey alanı dört πr^2 kare olarak alınır. Bu formül, kürenin dış yüzeyinin tamamını anlatır; silindirdeki gibi alt taban, üst taban ve yan yüzey ayrımı yapılmaz. Hacim ise dört πr^3 küp bölü üçtür. Hacim formülünde yarıçapın küpü bulunduğu için küçük bir yarıçap hatası sonucu ciddi biçimde değiştirir. Örneğin hacim verildiğinde önce π ve sayısal katsayılar sadeleştirilir, sonra r küp değeri bulunur. Alan istendiğinde ise bulunan r değeri dört πr^2 kare içinde kullanılır. Bu iki formül birbirine benzese de biri r kare, diğeri r küp içerdiğinden işlem dikkat ister.

Küre sorularında kesit bilgisi de önemlidir. Küre herhangi bir düzlemle kesildiğinde kesit daire biçimindedir. Ancak bu dairenin yarıçapı, kesit kürenin merkezinden geçmediği sürece kürenin yarıçapına eşit değildir. Merkezden geçen kesit en büyük daireyi verir; bu durumda kesit yarıçapı küre yarıçapıdır. Merkezden uzak bir düzlemle kesildiğinde ise daha küçük bir daire oluşur. Kürenin yarıçapı, merkezden kesit düzlemine indirilen dik uzaklık ve kesit dairesinin yarıçapı arasında Pisagor bağlantısı kurulur. Böylece alanı istenen kesit dairesi bulunabilir.

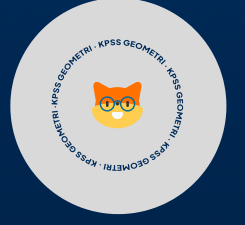
Küreyi çözerken en büyük kolaylık, bütün yönlerde aynı yarıçapın çalışmasıdır. Merkezden yüzey üzerindeki her noktaya çizilen doğru parçası r uzunluğundadır. Bu özellik, bazı sorularda dik üçgen kurmayı sağlar; özellikle kesit, merkez, yarıçap ve uzaklık birlikte verildiğinde iki boyutlu bir daire kesiti üzerinden işlem yapılır. Kürede yüzey alanı isteniyorsa dört πr^2 kare, hacim isteniyorsa dört πr^3 küp bölü üç düşünülür; kesit alanı isteniyorsa önce kesit dairesinin yarıçapı bulunur, sonra π çarpı bu yarıçapın karesi kullanılır. Konunun özü, kürenin bütün bilgisini doğru yarıçap etrafında toplamaktır.

Küre sorularında başka katı cisimlerle birleşik durumlar da görülebilir. Bir küre silindirin içine yerleşmişse silindirin yüksekliği ve çapı kürenin çapıyla ilişkilenebilir; bir küre küp içine yerleşmişse küpün ayrıtı kürenin çapı olabilir. Böyle sorularda temas noktaları rastgele değil, yarıçap ve çap

üzerinden okunur. Kürede açınım kullanılmadığı için yüzey alanını düzlemde parçalayarak bulmaya çalışmak doğru bir yöntem değildir. Bunun yerine merkez, yarıçap, çap ve kesit dairesi ilişkileri üzerinden ilerlemek gerekir. Bu sade ama güçlü yaklaşım, küreyi diğer katı cisimlerden ayıran temel düşüncedir.



benzensor



DERS NOTLARI 2026 BASKISI

KPSS GEOMETRİ

İyi çalışmalar

Bu ders notları benzensor tarafından ücretsiz hazırlandı; resmî kurum yayını değildir. Hata bildirimi: destek@benzensor.com

Okudun, sıra pekiştirmede
Şimdi çöz!

Okuduğun konuyu hemen soruyla pekiştir. benzensor uygulamasında konu anlatımı, soru bankası ve gerçek sınav simülasyonu bir arada.

